UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00179473 4

E. M. LIBQUEM
BOOKSELLER
PARIS & PESCHER
NEW YORK & EMPIRE

DES

# NOTATIONS MATHÉMATIQUES

## ÉNUMÉRATION, CHOIX ET USAGE

PAR

DÉSIRÉ ANDRÉ.

L'Algèbre, comme toutes les langues, a ses grands écrivains qui savent marquer tous les sujets à l'empreinte de leur génie.

J. BERTRAND.

*De quibusdam magni momenti minutiis.*

STOLL.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

DES

# NOTATIONS MATHÉMATIQUES

## ÉNUMÉRATION, CHOIX ET USAGE

42661 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

DES

# NOTATIONS MATHÉMATIQUES

## ÉNUMÉRATION, CHOIX ET USAGE

PAR

DÉSIRÉ ANDRÉ.

L'Algèbre, comme toutes les langues, a ses grands écrivains qui savent marquer tous les sujets à l'empreinte de leur génie.

J. BERTRAND.

*De quibusdam magni momenti minutiis.*

STOLL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

105368
4/10/10

QA
41
A63

Tous droits de traduction et de reproduction réservés.

# DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

### *Définition des notations mathématiques.*

En tout écrit moderne sur les Mathématiques, chaque page pour ainsi dire, abstraction faite des figures et autres illustrations nécessaires, nous présente des écritures de deux sortes : d'une part, un texte tout à fait analogue à un texte littéraire ; de l'autre, un ensemble de lettres, de chiffres, de signes, de symboles, c'est-à-dire un ensemble de caractères idéographiques spéciaux. La première de ces parties pourrait se nommer le *discours;* la seconde s'appelle d'ordinaire l'*algorithme* de la question. Ce sont les éléments variés constituant cet algorithme que nous désignons par la locution générale de *notations mathématiques.*

Comme son titre l'indique, le présent Ouvrage est consacré entièrement à l'étude de ces notations. Cette étude, semblable en cela à l'Algèbre, est à la fois une science et un art : une science, puisqu'elle nous fait connaître les notations usitées, leur forme, leur signification, leur origine, leur histoire; un art, puisqu'elle nous donne des règles sûres pour les bien choisir et les bien employer.

### *Remarques historiques.*

Les géomètres, soit de l'antiquité, soit du moyen âge, n'employaient guère comme signes spéciaux que les lettres de leurs alphabets; encore ne les employaient-ils que pour désigner les éléments des figures, ou les quantités géométriques, longueurs,

superficies, volumes. Diophante ([1]) paraît être le premier qui ait représenté par une lettre l'inconnue d'un problème d'Arithmétique; Viète ([2]), le premier qui ait représenté de la même façon les nombres connus, c'est-à-dire les données.

Les signes d'opérations, $+$, $-$, $\times$, $:$, ne nous semblent pas être antérieurs au XVI^e siècle. Il en est de même des signes d'égalité, d'inégalité et, en général, de tous les signes de relations. Les signes de coordination : parenthèses, crochets, accolades, lignes de points, se sont introduits peu à peu, selon le besoin. — L'invention d'un signe unique a eu parfois les plus heureux résultats : le signe exposant, dû ce semble à Descartes, a notablement abrégé le calcul algébrique; l'algorithme commode de Leibniz a fort accéléré les progrès du calcul différentiel; le signe de congruence, imaginé par Gauss ([3]), a simplifié toutes les égalités de la théorie des nombres. — Certaines notations particulières sont nées de nos jours, par exemple : celles des déterminants, celles des équipollences, celles des quaternions. Quelques-unes même ne nous paraissent pas encore absolument fixées : telles sont celles des fonctions elliptiques, celles des groupes, celles des ensembles, celles de la géométrie vectorielle.

Quoi qu'il en soit, du temps de Pascal et de Fermat ([4]) les notations étaient encore imparfaites et incommodes. Ce sont les géomètres du XVIII^e siècle et du commencement du XIX^e, principalement Euler, Lagrange ([5]) et leurs disciples, qui ont constitué le système actuel des notations mathématiques, et lui ont donné la forme sous laquelle nous l'employons couramment aujourd'hui.

## *Premiers avantages des notations.*

Les signes d'objets, c'est-à-dire les signes de points, de longueurs, de surfaces, de volumes, de quantités quelconques, même les groupes de chiffres représentant des nombres déterminés, ne

---

([1]) Environ 350 ans après Jésus-Christ.
([2]) Né en 1540, mort en 1603.
([3]) Descartes, 1596-1650; Leibniz, 1646-1716; Gauss, 1777-1854.
([4]) Pascal, 1623-1662; Fermat, 1601-1665.
([5]) Euler, 1707-1783; Lagrange, 1736-1813.

constituent pas une langue : ils ne forment, au plus, qu'une nomenclature, analogue à celles de la Botanique ou de la Zoologie. Les anciens, qui ne possédaient point d'autres signes spéciaux, ne tiraient de ceux-là que des avantages très faibles, se réduisant pour ainsi dire à des abréviations graphiques. Dans la plupart de leurs théorèmes, Euclide, Archimède, Apollonius [1] emploient des égalités, des proportions surtout, qu'ils combinent souvent entre elles. Il leur faut les énoncer toutes en langage ordinaire; il leur faut énoncer encore de cette façon, et démontrer à mesure toutes les transformations qu'ils leur font subir. Quelles complications! Quelles longueurs! A moins de l'avoir expérimenté soi-même, on ne peut se faire une idée de l'effort nécessaire pour comprendre, ou simplement pour suivre, les démonstrations ainsi rédigées.

Au contraire, dès qu'aux signes d'objets dont nous venons de parler on associe les signes d'opérations, de groupement, de relations, on obtient, à la place d'une simple nomenclature, une langue véritable. Les signes d'objets ne sont, pour ainsi parler, que des substantifs; les signes d'opérations et de groupement permettent de lier ces substantifs entre eux; les signes de relation nous donnent le moyen d'écrire de véritables phrases. Toute égalité, toute inégalité n'est-elle pas une proposition dont le premier membre est le sujet, dont le second membre est l'attribut, et dont le signe même de relation constitue le verbe? Grâce au système de ces différents signes, les phrases mathématiques n'ont plus besoin d'être écrites en langage ordinaire : elles s'écrivent à l'aide de notations spéciales et deviennent infiniment brèves, précises et claires. Bien plus, grâce à cette même écriture, il n'est plus nécessaire d'expliquer ni de démontrer à mesure les transformations qu'on leur fait subir : l'Algèbre les effectue, sans explication, d'une façon absolument mécanique. De là, pour le lecteur comme pour l'auteur, d'énormes abréviations et simplifications.

Ces très grands avantages ne sont pas les seuls. Les équations ou relations quelconques, qui interrompent le discours, nous en présentent d'autres. En résumant, pour ainsi parler, tout ce qui les précède, elles nous indiquent ce qui est déjà fait et ce qui reste à faire. L'attention et la mémoire en sont singulièrement sou-

---

[1] Euclide, 300; Archimède, 250; Apollonius, 200 ans avant Jésus-Christ.

lagées. — Elles le sont aussi par l'emploi, qu'on ne saurait trop recommander, des signes de coordination, en particulier des signes de séparation et de correspondance. Toute démonstration, toute recherche se partage évidemment en différentes parties ou phases : rien n'est plus avantageux, pour l'œil et pour l'esprit, que la mise en évidence, à l'aide des signes de coordination, de ces divisions successives. — Sans doute on aurait tort de dire avec Lagrange que la Géométrie ancienne, qui ne se sert point de nos signes spéciaux, doit être regardée comme une langue morte. Mais on serait, selon nous, bien près de la vérité en affirmant que c'est à l'usage continuel qu'elles en font que les Mathématiques modernes doivent principalement leur supériorité sur les anciennes, leurs progrès incessants et surtout les généralisations et extensions qu'ont reçues tour à tour leurs différentes parties.

### *Extensions et généralisations.*

Considérons un problème à une seule inconnue, où les données sont des nombres déterminés, écrits en chiffres. En raisonnant sur ces données et effectuant à mesure les calculs, nous arrivons à la valeur numérique de l'inconnue. — Si un problème tout pareil se présente, ne différant de celui-là que par les valeurs des données, il nous faut, pour le résoudre, recommencer, dans leur ordre, tous nos raisonnements et calculs : le travail n'est guère moindre cette seconde fois que la première. — Mais supposons que nous représentions les données par des lettres et que nous raisonnions sur ces lettres comme nous avons précédemment raisonné sur les nombres. Les calculs ne pouvant plus être effectués seront seulement indiqués; les données représentées par les lettres ne se prêtant plus à aucune simplification ou réduction numérique traverseront toutes les phases de la question sans cesser d'être reconnaissables; finalement, nous obtiendrons une expression qui nous fera connaître par quel ensemble d'opérations l'inconnue se peut déduire des données. — L'égalité ayant pour second membre cette expression et pour premier membre l'inconnue est ce qu'on appelle une *formule*. Cette formule nous fournit à elle seule la solution de tous les problèmes particuliers, en nombre infini, qui ne diffèrent du premier que par les valeurs numériques des données : il nous suffit, en effet, d'y

remplacer dans chaque cas les lettres par les nombres et d'effectuer les opérations. Elle est analogue aux recettes de l'industrie, car elle nous permet d'obtenir les résultats à coup sûr, sans avoir à recommencer ni essais ni recherches. De là l'extension, l'universalité, pour parler comme Newton (1), donnée à l'Arithmétique (2) par les signes de l'Algèbre. Cette extension, il faut bien le remarquer, est uniquement due à l'idée qu'a eue Viète de représenter les données par des lettres de l'alphabet.

Tel problème d'Algèbre ou de Géométrie, traité par le calcul, conduit à des expressions qui semblent n'avoir aucun sens, ou plutôt qui paraissent absolument impossibles. L'Algèbre ne s'arrête point court devant ces impossibilités. Avec une audace dont les autres sciences n'offrent guère d'exemples, elle passe outre; elle accorde droit de cité à ces expressions impossibles; elle se les approprie au lieu de les exclure. A l'aide de notations nouvelles, elle en constitue ce qu'on appelle des *symboles;* et ces symboles, nombres fictifs ou pseudo-quantités, par convention résolvent le problème. — Il est nécessaire dans les sciences de généraliser à mesure qu'on avance. Les symboles ainsi formés permettent les plus utiles généralisations. C'est grâce, par exemple, à la considération des nombres négatifs et des nombres imaginaires, créés au XVII^e siècle, que toute équation algébrique du degré $m$ peut être regardée comme admettant toujours exactement $m$ racines. — D'ailleurs, la théorie des opérations sur les nombres négatifs, les nombres imaginaires, les nombres complexes, et l'appropriation de ces calculs à des usages pratiques et réels ont pris, surtout au XIX^e siècle, une extension considérable : elles constituent l'un des plus beaux titres de gloire des savants modernes.

Certains ont dit qu'il n'avait manqué à Euclide que la notion des coordonnées pour inventer, il y a plus de 2000 ans, la Géométrie analytique. Il semble bien cependant que cette invention suppose l'usage et l'habitude des notations mathématiques : signes de quantités, d'opérations, de relations. En fait, elle ne s'est accomplie, par le génie de Descartes, qu'après tous les progrès que les notations avaient réalisés pendant la fin du XVI^e siècle et le

(1) Né en 1642, mort en 1727.
(2) *Arithmetica universalis* est le titre d'un Ouvrage de Newton.

commencement du XVII^e^. — On en connaît les immenses résultats : l'Algèbre et la Géométrie soudées ensemble, ou plutôt se pénétrant l'une l'autre; l'étude des courbes et des surfaces ramenée à celle des équations et, réciproquement, les courbes et les surfaces servant à la représentation, à l'interprétation des fonctions de deux et de trois variables. — Les notations ont permis d'aller encore plus loin, car les hyperespaces, introduits si hardiment dans la Science, ont fourni une interprétation géométrique des faits algébriques ou analytiques relatifs à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Sous les noms de *calcul fonctionnel, calcul des opérations, calcul symbolique,* on comprend tous les calculs où les signes d'opération perdent leurs significations ordinaires et deviennent soit des signes de quantités, soit des indications purement mnémoniques. — Dans le premier cas, on peut opérer sur eux comme sur les signes de quantités, en ayant soin seulement de se soumettre au principe de la permanence des règles du calcul. C'est ce que fait constamment la *nouvelle Algèbre.* — Dans le second cas, qui est de beaucoup le plus fréquent, on écrit à la façon d'une expression ancienne, très connue, une expression nouvelle qui lui ressemble. Rencontre-t-on, par exemple, un polynome rappelant le développement d'une certaine puissance du binome? On lui applique la notation de cette puissance, en avertissant qu'il s'agit d'une puissance symbolique. C'est ce que l'on fait lorsqu'on représente les différences successives d'un système de nombres, ou les différentielles totales successives d'une fonction de deux variables. — On doit bien l'avouer, ces différents calculs ne présentent pas toujours une clarté, une précision parfaites; ils ne possèdent ces qualités que pour les lecteurs qui ont bien présentes à l'esprit toutes les conventions sur lesquelles ils reposent; mais alors ils produisent une grande simplification, une grande abréviation. Quoi qu'il en soit, ils nous offrent un nouvel exemple des généralisations considérables qu'apportent avec eux nos divers systèmes de notations.

### *Mécanisme algébrique.*

A tous les avantages déjà énumérés que donne l'emploi de ces notations, viennent s'ajouter ceux qui résultent de ce qu'on pour-

rait appeler le *mécanisme algébrique*. Ce mécanisme consiste en règles très simples et très nettes, qui résument et, pour ainsi parler, emmagasinent en elles une multitude de raisonnements. Dispensant de répéter ces raisonnements à tout propos, elles rendent les calculs infiniment courts et faciles. « *C'est facile comme l'Algèbre* » est un mot célèbre de Lagrange. — Ces règles, d'ailleurs, pour peu qu'on soit attentif en les appliquant, donnent même aux calculs une sûreté qui inspire toute confiance. Euler est allé jusqu'à dire que « *le géomètre doit se fier au calcul algébrique plus qu'à son propre jugement* ». — On ne saurait le nier, ces règles mécaniques de calcul sont pour l'algébriste un secours admirable; il n'a qu'à les suivre; elles ne le dirigent pas seulement, elles le portent (1); il n'a besoin pour les appliquer que d'une attention presque matérielle et, pour ainsi dire, que de ses yeux.

Soit une formule contenant plusieurs lettres désignant des quantités distinctes, la formule, par exemple, des intérêts simples qui nous offre ces quatre quantités : le taux, le capital placé, la durée du placement et l'intérêt produit. On peut la résoudre successivement par rapport à chacune de ces quatre quantités. De là quatre formules différentes donnant la solution de quatre problèmes généraux. Voilà un résultat très vaste, obtenu immédiatement. — Il y a plus : si la formule initiale se rapporte à un phénomène quelconque, elle nous fournit aussitôt, par de simples transformations algébriques, un certain nombre, sinon la totalité, des lois par lesquelles ce phénomène est régi. De la formule qui donne l'espace parcouru pendant un temps déterminé, dans le mouvement rectiligne uniforme, on déduit ainsi, en deux ou trois lignes d'écriture algébrique, toutes les lois de ce mouvement : Galilée (2), qui ne faisait pas usage de formules, consacre quatre pages (3) à les établir. — L'Algèbre, on peut le dire, est une admirable machine à déduction. Dans les diverses parties des Mathématiques, les équations initiales, celles qui servent de fondements aux théories, s'établissent d'ordinaire par des considérations et raisonnements directs. Mais, ces équations une fois établies, rien ne saurait remplacer le calcul pour en développer toutes les conséquences.

---

(1) A. Rebière, *Mathématiques et mathématiciens*, in-8°, Paris, 1889, p. 30.
(2) Né en 1564, mort en 1642.
(3) *Giornata terza, de Motu Æquabili.*

C'est Euler qui donna le premier l'exemple de ces longues déductions où, les conditions du problème étant exprimées tout d'abord à l'aide des notations mathématiques, le calcul, à lui seul, surmonte toutes les difficultés et fournit tous les résultats. — C'est Lagrange, dans sa *Mécanique analytique,* qui a porté cette méthode à sa perfection. Il s'y était proposé « *de réduire la théorie de cette science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales dont le simple développement donnât toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème* ». Ce but est entièrement atteint. L'Ouvrage ne contient point de figures; on n'y trouve ni constructions, ni raisonnements géométriques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme : tout s'y déduit du seul principe des vitesses virtuelles par le simple jeu des notations.

Ce sont ces mêmes méthodes, fondées sur le calcul, que l'on retrouve dans la *Mécanique céleste* de Laplace, qui ne contient non plus aucune figure, et dans les Ouvrages de Physique mathématique, tels que ceux de Fourier et de Lamé [1]. Grâce à ces derniers travaux et aux équations différentielles auxquelles ils ont conduit, des analogies remarquables sont apparues entre les différentes parties de la Physique et plusieurs parties de l'Analyse, voire de la Géométrie. L'hydrostatique et la théorie du potentiel ont introduit les familles de surfaces de niveau; la théorie de la chaleur a introduit celles des surfaces isothermes; la théorie de la lumière, celles des surfaces d'onde. C'est l'étude mathématique de l'équilibre d'élasticité des corps solides qui a conduit à considérer trois familles de surfaces conjuguées et orthogonales. L'étude de certaines intégrales se trouve liée aux plus importants des problèmes que posent les théories électriques. Ce sont des transformations de calcul qui ont tiré des formules de Lagrange le type des équations différentielles auxquelles plusieurs tendent à ramener aujourd'hui, dans les sciences physiques, la notion [2] même d'explication mécanique.

---

[1] Laplace, 1749-1827; Fourier, 1768-1830; Lamé, 1795-1870.

[2] Émile Picard, *La Science moderne*, in-12, Paris, 1905, p. 26.

## *Éloges et critiques.*

L'Algèbre et l'Analyse d'une part, les notations mathématiques de l'autre sont si étroitement liées, qu'on ne saurait faire l'éloge ou la critique de celles-là sans faire en même temps l'éloge ou la critique de celles-ci. Nous ne sortons donc pas de notre sujet en résumant le grand bien et le peu de mal qu'on a dit de l'Algèbre et de l'Analyse.

On connaît cette phrase de Condillac (1) : « *Une science bien traitée n'est qu'une langue bien faite* (2). » Il a dit aussi : « *L'Algèbre est une langue bien faite et c'est la seule* (3). » — Lorsque Leibniz songe à créer une langue, une écriture idéale, c'est l'Algèbre qui lui paraît être le modèle à imiter. « *Cette écriture,* dit-il (4), *serait une espèce d'Algèbre générale et donnerait le moyen de raisonner en calculant, de sorte qu'au lieu de disputer on pourrait dire : Comptons. Et il se trouverait que les erreurs de raisonnement ne seraient que des erreurs de calcul qu'on découvrirait par des épreuves comme dans l'Arithmétique.* »

Il est certain que l'Algèbre est une langue condensée, se prêtant merveilleusement aux combinaisons de la pensée, en tant qu'elle a pour objet la comparaison des formes et des grandeurs. Par son secours, l'art supplée au génie, et le génie a eu des succès qu'il n'aurait jamais obtenus, réduit à ses propres forces. — Il ne peut y avoir de langage plus universel que l'Analyse, plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels (5). C'est une écriture qui n'a point de signes pour exprimer les idées confuses, qui est capable de condenser dans ses symboles un nombre immense de résultats, et qui possède une admirable puissance de transformation et de prévision (6). C'est une méthode lumineuse, universelle,

---

(1) Né en 1715, mort en 1780.
(2) *Œuvres complètes*, in-12, Paris, 1822, t. XVI, p. 6.
(3) *Ibid.*, p. 5.
(4) Leibniz, édit. Gerhardt, t. VII, p. 26.
(5) Fourier, *Théorie de la chaleur : discours préliminaire.*
(6) E. Picard, *La Science moderne,* in-12, Paris, 1905, p. 47.

applicable à tout, aussi bien au discontinu qu'au continu, aussi bien aux questions, purement mathématiques, qui naissent de l'imagination du géomètre, pour ne pas dire de son caprice, qu'aux questions que nous posent les autres sciences, principalement la Physique, la Chimie, l'Histoire naturelle.

L'emploi du calcul est comparable à celui d'un instrument dont on connaît exactement le degré de précision. On lui a reproché de dispenser celui qui s'en sert de réfléchir et de raisonner, et il est bien certain que beaucoup de personnes emploient l'Analyse comme quelques manufacturiers se servent de la machine à vapeur, sans se douter de son mode d'action. — On a dit aussi qu'elle détourne de la considération directe des objets; qu'une science n'est point faite quand on l'a réduite à des formules analytiques (1); que la méthode géométrique des anciens est plus lumineuse et présente une évidence plus sensible. Il y a dans tous ces reproches une part de vérité; mais les purs géomètres, Chasles par exemple, n'en admirent pas moins l'instrument analytique; Poncelet (2) n'en a pas moins tiré de l'Analyse les premiers fondements de ses travaux; tous ne s'en servent pas moins des notations mathématiques. Comme l'a écrit Lagrange (3), « *l'Algèbre plane, pour ainsi dire également, sur l'Arithmétique et sur la Géométrie* ».

On répète souvent qu'il n'y a, dans une équation, que ce qu'on y a mis. « *Les Mathématiques,* a dit Faraday (4), *sont comme un moulin à café qui moud admirablement ce qu'on lui donne à moudre, mais qui ne rend pas autre chose que ce qu'on lui a donné.* » Pures calomnies. La forme nouvelle sous laquelle on retrouve les choses étudiées constitue souvent à elle seule une importante découverte. Telle est même la fécondité de l'Analyse, qu'il suffit de traduire en cette langue universelle les vérités particulières pour voir sortir de leurs expressions des vérités nouvelles et inattendues (5). L'Analyse est vraiment créatrice : c'est à elle que la science contemporaine est redevable de ses plus hautes, de ses plus vastes conceptions.

---

(1) Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, p. 80.

(2) Chasles, 1793-1880; Poncelet, 1788-1867.

(3) *Résolution des équations numériques*, in-4°, Paris, an VI, p. VI.

(4) Né en 1791, mort en 1867.

(5) Laplace, *Système du monde*, t. V, chap. IV.

## *Grands écrivains en Mathématiques.*

Pour que l'Algèbre et l'Analyse possèdent ces admirables propriétés, il faut évidemment qu'elles soient maniées avec une habileté extrême; et, puisque les notations mathématiques y jouent le rôle capital, il faut que ces notations y soient correctes, bien choisies, bien employées, en un mot qu'elles y soient excellentes. — Il en est rarement ainsi. Dans la plupart des Livres et Mémoires, des fautes de notation existent; parfois elles fourmillent. Et je ne parle pas ici de cet abus des symboles qui dépare certains Ouvrages, qui les rend illisibles et qui se rencontre jusque dans les dernières communications de Cauchy ([1]), l'un pourtant de nos plus illustres géomètres. Je ne fais allusion qu'aux fautes de notation proprement dites, qu'aux fautes contre la raison, contre le bon sens.

« *L'Algèbre, comme toutes les langues, a ses grands écrivains qui savent marquer tous les sujets à l'empreinte de leur* ([2]) *génie.* » Sans parler de ceux qui vivent encore, le XIX^e^ siècle nous en présente plusieurs. Nous nous contenterons de citer Lamé dans ses Ouvrages de Physique mathématique et Cayley ([3]) dans ses admirables travaux d'Algèbre. Mais celui qui, dans les Sciences mathématiques, est sans contredit le premier des écrivains, c'est Lagrange, l'immortel auteur de la *Mécanique analytique*. Son style est réputé classique; il doit être regardé comme le prototype qu'il faut étudier et imiter. Tout le monde s'est plu à en célébrer la perfection. On connaît cette phrase d'Élie de Beaumont ([4]) : « *Pures et faciles comme les vers de Racine, les formules de Lagrange ont augmenté le nombre des adeptes de la Science, en même temps qu'elles ont facilité leurs travaux* », et cette autre de Biot ([5]) : « *Lorsqu'on a une fois lu un Mémoire de Lagrange,*

---

([1]) Né en 1789, mort en 1857.

([2]) J. BERTRAND, *Discours prononcé aux funérailles de Lamé*, 3 mai 1870. C'est notre première épigraphe.

([3]) Né en 1821, mort en 1895.

([4]) *Éloge de Legendre.*

([5]) *Mélanges scientifiques et littéraires.*

*on n'a jamais besoin d'y revenir : on a tout compris, et pour toujours.* »

Quand on vante les bonnes notations, le mot qui revient le plus souvent dans le discours est celui d'*élégance*. On l'applique constamment au style analytique de Lagrange. Mais quel sens faut-il lui attribuer? Celui qu'on lui donne dans la littérature et les beaux-arts, celui que lui assigne son étymologie, *eligere,* choisir. L'élégance est le résultat d'un choix. Elle implique une foule de qualités dont les principales, dans les notations mathématiques, sont la facilité, la simplicité, la netteté; on pourrait dire la *vérité* et la *beauté*. Les Mathématiques ont leur côté philosophique et artistique. Les notations excellentes présentent aux personnes initiées à ce langage une sorte de charme qui les entraîne vers l'étude. Lagrange malade se délectait, dit-on, dans la contemplation de calculs algébriques bien écrits et bien disposés. Il est certain que les systèmes de formules réputés parfaits présentent pour l'œil qui les regarde, comme pour l'oreille qui les entend lire à haute voix, une sorte d'harmonie visuelle ou musicale, c'est-à-dire une jouissance esthétique d'un ordre très élevé. Une expression, une formule peut s'écrire de plusieurs manières toutes également exactes et correctes, mais non pas toutes également bonnes. Ce qui fait préférer l'une à l'autre, ce qui fait prendre la plus élégante au vrai sens du mot, c'est une sorte de don naturel, un bon sens délicat que possèdent au plus haut point les grands écrivains mathématiques et qui, comme dans la littérature et les beaux-arts, n'est autre chose que le goût.

### *Objet et but du présent Ouvrage.*

Revenons au présent Ouvrage. Comme son titre l'indique, il se compose de trois Parties : énumération, choix et usage. La première est la science des notations; la deuxième, l'art de les choisir; la troisième, l'art de les employer.

Dans la première, nous faisons connaître les notations actuellement usitées, la manière de les écrire, de les disposer, de les rendre absolument correctes. Nous nous y occupons seulement des notations usitées couramment dans les Mathématiques des divers

ordres, ne nous arrêtant point à celles qu'on n'emploie qu'à titre exceptionnel. C'est, pourrait-on dire, l'exposé des notations contemporaines.

Dans la deuxième et la troisième Partie, nous donnons les règles simples et nettes qui doivent présider au choix et à l'usage des signes. Ces règles sont fondées sur ce principe évident qu'il faut s'inspirer de l'énoncé de la question, c'est-à-dire de la nature des objets étudiés, de leurs propriétés, de leurs analogies, de leurs différences, de leurs rapports, des divers modes de classification dont ils sont susceptibles. Frappés des avantages que nous offrent les formules et équations symétriques, plusieurs auteurs recommandent de chercher la symétrie. Précepte trop étroit, puisqu'il ne vise qu'une qualité, et souvent inapplicable, puisque bien des expressions veulent être dissymétriques. Pour nous, il ne faut chercher en particulier ni la symétrie, ni la dissymétrie, ni aucune autre qualité spéciale. Ce qu'il faut chercher toujours, avant tout, c'est la vérité des notations.

Afin de bien montrer et faire comprendre l'esprit de nos règles, leur signification exacte et la manière de les appliquer, nous ferons suivre chacune d'elles d'exemples nombreux et variés nous en présentant, les uns une application correcte, par conséquent à imiter, les autres une infraction plus ou moins grave, mais très nette. Ces derniers seront de beaucoup les plus nombreux, car, s'il n'y a qu'une manière d'observer fidèlement une règle, il y en a une multitude de l'enfreindre. D'ailleurs, pour qu'ils soient à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, nous avons toujours choisi nos exemples, soit de bonne, soit de mauvaise écriture, parmi les plus simples et les plus courts.

Quelques-unes des fautes que nous condamnons paraîtront peut-être à plusieurs très légères, pour ne pas dire insignifiantes; elles ne seront à leurs yeux que des minuties indignes de nous arrêter. Mais certaines minuties sont d'une grande importance. L'illustre médecin Stoll [1] a intitulé l'un des Chapitres les plus utiles qu'il ait écrits : « *De quibusdam magni momenti minutiis* [2]. » Ce titre conviendrait admirablement à bien des paragraphes du présent

---

[1] Né en 1742, mort en 1788.

[2] C'est cette phrase que nous avons prise pour notre seconde épigraphe.

Ouvrage. Est-il, d'ailleurs, beaucoup plus ridicule de s'occuper des minuties de l'écriture pour la rendre excellente que des minuties du raisonnement pour le rendre rigoureux? En de telles matières, on ne saurait se montrer trop exigeant : pour atteindre au bien, il faut viser au parfait.

Il se peut même, tant la plupart de nos règles sont naturelles, simples, évidentes, que bon nombre de nos lecteurs les jugent inutiles. Tout cela, diront-ils, on le savait. Sans doute. Mais, si on le savait, pourquoi ne l'appliquait-on pas? Pourquoi, comme nous l'avons fait observer plus haut, les fautes les plus graves se rencontrent-elles dans des Ouvrages sérieux et les plus légères même dans des chefs-d'œuvre? C'est qu'on ne s'en occupe pas; c'est qu'on écrit trop vite; c'est que la bonne écriture paraît chose négligeable. Et cependant, de toutes les sciences, n'est-ce pas la Mathématique qui fait le plus grand usage des signes spéciaux et qui en tire le plus de profit? Les notations bien choisies, bien employées ne sont-elles point pour un travail mathématique une condition de succès et une garantie de durée? Nous voudrions appeler l'attention sur la nécessité d'écrire correctement. Nous voudrions que, grâce au présent Ouvrage, tout géomètre un peu attentif pût arriver à écrire bien, par principes, comme les mieux doués écrivent bien tout naturellement, par une sorte d'instinct.

Voilà le but que nous nous sommes proposé. L'avons-nous atteint? En avons-nous seulement approché? Nous ne savons. La composition de notre Livre était malaisée; les matières si nombreuses qu'il contient étaient difficiles à mettre en ordre; les redites, les omissions, les longueurs, les erreurs peut-être, difficiles à éviter. Nous avons fait de notre mieux. Connaissant nos collègues et confrères comme nous les connaissons, nous pensons pouvoir compter sur leur indulgence. « *Hominis ingenui est benè velle.* »

DES

# NOTATIONS MATHÉMATIQUES.

## PREMIÈRE PARTIE.

### ÉNUMÉRATION.

1. Cette première Partie du présent Ouvrage est entièrement consacrée à l'énumération des notations ou signes mathématiques actuellement en usage. Elle en est, pour ainsi dire, l'inventaire détaillé. Nous y considérons d'abord les signes de nombres ou quantités : nombres entiers, nombres fractionnaires, quantités déterminées, nombres ou quantités indéterminés; — ensuite, les signes de calcul : signes d'opérations, de coordination, de fonctions, de relations; — puis les notations particulières de la Géométrie pure, de la Géométrie analytique, des Mathématiques appliquées; — enfin les signes de rédaction, c'est-à-dire les signes qui servent, dans toutes les parties de la Science, au bon agencement des Ouvrages ou Mémoires, à leur distribution, à leur disposition.

# CHAPITRE I.

## NOMBRES ENTIERS.

### Chiffres.

2. L'écriture de tous les nombres se ramène à celle des *nombres entiers* et ceux-ci, présentement, chez tous les peuples civilisés, s'écrivent à l'aide de dix caractères spéciaux, nommés *chiffres arabes,* ou simplement *chiffres*. Ces caractères sont

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0.

Les neuf premiers d'entre eux, pris isolément, représentent les neuf premiers nombres et en portent les noms : on les appelle *chiffres significatifs*. Le dixième, appelé *zéro*, ne représentant aucun nombre, est dit *non significatif :* on l'a créé pour occuper une place dans les groupes de chiffres; on a été amené ensuite à l'employer à part, comme signe du *néant*.

3. Sous leur forme originaire, les chiffres significatifs 1, 2, 3, . . , n'étaient, paraît-il, que des lignes brisées présentant 1, 2, 3, . . . côtés ou angles. En certaines langues, en turc par exemple, le zéro n'est qu'un simple point; en arabe, on le nomme *çafar,* et ce mot, qui signifie *le vide,* nous a donné, par l'intermédiaire de l'italien *cifra,* notre mot français *chiffre*.

4. Dans la théorie générale des signes, les chiffres sont analogues aux lettres de l'alphabet. Les lettres, caractères *phonétiques,* servent à écrire les mots; les chiffres, caractères *idéographiques,* servent à écrire les nombres. Tel mot, comme *a*; tel nombre, comme 6, ne demande qu'un caractère, lettre ou chiffre; tel mot, comme *or*; tel nombre, comme 328, en exige deux ou plusieurs.

### Numération écrite.

5. Les nombres qui ne dépassent pas neuf s'écrivent chacun à l'aide du chiffre qui le représente, c'est-à-dire à l'aide d'un chiffre significatif unique. Les nombres supérieurs à neuf s'écrivent chacun, au contraire, à l'aide d'un assemblage de chiffres, parmi lesquels se rencontre fréquemment le zéro.

6. Ces assemblages sont constitués conformément aux règles de la *numération écrite*. Celle-ci, comme la *numération parlée*, suppose les unités qui composent les nombres préalablement réunies en groupes de dix en dix fois plus considérables. Ces groupes se nomment *unités des différents ordres;* ce sont : les unités simples ou unités du premier ordre, les dizaines ou unités du deuxième ordre, les centaines ou unités du troisième ordre, etc.

Les règles de la numération écrite peuvent se résumer ainsi : *pour écrire un nombre, on marque par un chiffre significatif combien ce nombre contient d'unités de chaque ordre, en prenant soin de placer, à partir de la droite, au premier rang, le chiffre des unités du premier ordre; au deuxième rang, celui des unités du deuxième ordre; au troisième rang, celui des unités du troisième ordre; etc.; et en prenant soin aussi de combler à mesure, par des zéros, les places ou rangs laissés vides.*

7. Dans l'assemblage de chiffres représentant ainsi un nombre quelconque, les chiffres sont placés à la suite les uns des autres sur une même ligne horizontale; chaque chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités *dix fois plus grandes;* chaque chiffre aussi possède deux valeurs : une *valeur absolue,* qui est liée à sa forme, une *valeur relative,* qui dépend de sa position; et le nombre représenté n'est autre chose, évidemment, que la somme des valeurs relatives de tous ses chiffres.

### Base de la numération.

8. C'est parce que les unités des différents ordres sont de dix en dix fois plus grandes que notre numération est appelée *décimale* et

que le nombre 10 en est appelé la *base*. Sans aucun doute, on a choisi 10 parce qu'il est le nombre de nos doigts. On eût pu prendre comme base 2, 8, 12, et la numération eût été *binaire, octavale, duodécimale*. Il semble que, pour la pratique, 12 eût été avantageux, parce qu'il est exactement divisible par 2, 3, 4 et 6.

Au dire de Voltaire, Charles XII aurait proposé comme base le nombre 64 qui est à la fois un carré, un cube et, par conséquent, une sixième puissance. A une époque assez reculée, on a compté chez nous par *vingtaines,* comme en témoignent les archaïsmes quinze-vingts, six-vingts, quatre-vingts, soixante-dix, quatre-vingt-dix, etc., dont les derniers persistent encore, en dépit de la logique et du bon sens.

9. En tout système de numération écrite, le nombre des chiffres, y compris le zéro, est juste égal à la base. De là la nécessité de la bien choisir puisque c'est du nombre des chiffres que dépendent, au moins pour la plupart, les avantages et les inconvénients du système.

Quand la base est grande, le nombre des chiffres l'est aussi; il en est de même du nombre des éléments, soit de la Table d'addition, soit de la Table de multiplication et, par suite, du nombre des résultats que le calculateur doit apprendre et retenir. Quand elle est petite, le nombre des chiffres est petit : dans la numération binaire, qui possède la plus petite base possible, il n'y a que deux chiffres, 1 et 0; comme Leibniz l'a fait remarquer, l'opération nommée *multiplication* n'y existe pour ainsi dire plus, et les logarithmes y sont inutiles.

10. Plus la base est grande et moins il faut de caractères pour écrire un nombre donné. Dans la base 2, le nombre 1025 exige onze caractères; dans la base 64, il n'en demande que deux.

Si l'on tenait à écrire les nombres de façon que chacun d'eux ne présentât que peu de chiffres, il conviendrait de choisir une base assez grande. Il serait commode de prendre pour base le nombre 25 des lettres de notre alphabet, en prenant comme chiffres ces 25 lettres elles-mêmes.

11. Dans les cours d'Arithmétique, lorsque l'on propose des

exercices sur les changements de base, on représente par des lettres latines ou grecques les chiffres supérieurs à 9. Si, par exemple, la base est 12, on représente par $\alpha$ et $\beta$ les chiffres significatifs répondant respectivement aux nombres 10 et 11 : on écrit ainsi le nombre $3\alpha 5\beta$. Parfois même, pour bien montrer que ce nombre est écrit avec la base 12, on le met sous cette forme $3\alpha 5\beta_{12}$, l'indice n'étant autre chose que la base, écrite bien entendu dans le système décimal.

12. D'ailleurs, dans tous les systèmes qu'on vient de voir, et quelle que soit la base choisie, les unités des différents ordres forment une *progression géométrique;* aussi pourrait-on dire que ce sont des systèmes à *groupement régulier*. On en a imaginé d'autres, où cette régularité n'existe point, qui ne s'emploient que pour certaines recherches, mais qui y rendent parfois les plus grands services. Telle est la *numération factorielle* (1), qui a été inventée par M. Laisant, et qui facilite grandement l'étude des permutations.

### Supériorité de la numération écrite.

13. Notre numération écrite actuelle, la seule dont nous nous occupions ici, nous vient des Arabes ou plutôt des Indous. Elle ne s'est guère répandue en Europe avant la fin du XII^e siècle (2). Ce n'est même qu'au XVI^e que ses chiffres ont pris une figure uniforme. Elle a été déduite de la numération parlée, nous ne savons au juste ni où, ni quand, ni comment; mais il est certain qu'elle lui est très supérieure.

14. La numération parlée, qui est décimale depuis l'antiquité la plus reculée, présente, en effet, une foule d'irrégularités, d'inconvénients, les uns inhérents à sa nature, les autres provenant de l'usage, mais dont pas un ne se rencontre dans la numération écrite.

D'abord, la numération parlée varie, comme les langues, d'une nation à une autre : c'est un ensemble de *systèmes locaux*. La

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVI, 1888.
(2) LIBRI, *Histoire des Mathématiques en Italie*, t. I, p. 125.

numération écrite, composée de signes idéographiques, est la même chez tous les peuples : c'est un *système universel.*

Ensuite, la numération parlée ne tient aucun compte des ordres d'unités qui manquent; elle supprime parfois le mot *un;* elle exige, lorsque le nombre devient très grand, qu'on invente de nouveaux mots. La numération écrite tient compte, par ses zéros, des ordres d'unités manquants; elle ne supprime jamais le chiffre 1; et, si grands que les nombres deviennent, elle n'exige jamais de caractères nouveaux.

Enfin, la numération parlée condense parfois deux mots en un seul, comme lorsqu'elle dit *douze* pour *dix-deux, cinquante* pour *cinq dizaines;* elle cesse parfois d'être décimale, comme lorsqu'elle remplace *octante* par *quatre-vingts, nonante-un* par *quatre-vingt-onze;* elle énonce parfois les unités avant les dizaines, comme dans le latin *septem-et-decem,* dans l'allemand *ein-und-zwanzig.* La numération écrite ne réunit jamais deux ordres d'unités; ne cesse jamais d'être décimale; n'intervertit jamais l'ordre de ses chiffres.

### Avantages de la numération écrite.

15. Notre numération écrite ne comprend, on vient de le voir, qu'un petit nombre de règles, très courtes, très simples, qui ne souffrent aucune exception. A chaque nombre correspond toujours un signe écrit, simple ou complexe, mais unique. A chaque chiffre ou groupe de chiffres correspond toujours un nombre et un seul. Quand on connaît les dix caractères appelés *chiffres,* il suffit de quelques minutes pour apprendre à lire les plus grands nombres; et, ce qui est la marque d'une écriture excellente, dès qu'on sait les lire on sait les écrire.

16. Sous la forme où ils sont écrits en chiffres, les nombres sont décomposés en leurs unités des différents ordres, et le sont d'une façon régulière, uniforme. A la lecture, les unités qui s'y présentent les premières sont les plus importantes; dans les calculs, on n'a jamais, en dernière analyse, à considérer de nombres supérieurs à neuf; et il suffit, pour ainsi dire, de rapprocher les nombres écrits pour que leurs unités des mêmes ordres se placent les unes sous les autres.

17. Les anciens, Grecs et Romains, possédaient notre numération parlée; mais leur numération écrite, formée de *lettres numérales,* présentait de nombreux défauts. Ils ne pouvaient s'en servir pour effectuer aucun calcul; ils étaient obligés ou de calculer de tête, ou d'employer des *abaques,* des *jetons,* même de *petits cailloux,* d'où notre mot *calcul.* Les *chiffres romains* en particulier étaient de très mauvais signes. Ils ont subsisté jusqu'à nos jours; mais nous ne les employons plus que comme *nombres ordinaux,* que comme *numéros.*

18. C'est sur notre manière d'écrire les nombres que reposent nos *règles pratiques* d'addition, de soustraction, de multiplication, etc. C'est sur elle que sont fondées les *machines à calcul,* dont Pascal a eu la première idée, et qui vont sans cesse en se perfectionnant, en se répandant. C'est d'elle, et d'elle uniquement, que dépendent la plupart de nos caractères de *divisibilité.* On peut dire, sans exagération, que notre numération écrite constitue un *système de signes parfait.* Il n'en existe, dans les sciences du moins, aucun autre qui puisse lui être comparé.

### Nécessité de bien écrire les nombres.

19. Il faut apporter à l'écriture des nombres le plus grand soin, la plus grande attention. D'abord, les questions où on les emploie, qu'elles appartiennent aux Mathématiques pures ou aux Mathématiques appliquées, exigent toujours une précision absolue. Ensuite, les erreurs qu'on commet en les écrivant sont toujours graves; infiniment plus graves, en particulier, que celles qu'on commet dans l'écriture des mots.

Dans un mot, en effet, une lettre mal formée, déplacée, ajoutée ou omise n'a guère de conséquences fâcheuses : le plus souvent, elle remplace le mot qu'on voulait écrire par un autre qui n'existe pas dans la langue; et lorsqu'il arrive, par grand hasard, qu'il y existe, ce nouveau mot est presque toujours incompatible avec l'ensemble de la phrase : le contexte indique immédiatement le mot qu'on eût dû écrire. Dans les nombres, rien de pareil : un chiffre mal formé, déplacé, ajouté ou omis remplace le nombre qu'on

devait écrire par un nombre nouveau, qui existe toujours, et dont le contexte ne permet, en général, ni de reconnaître, ni *a fortiori* de corriger l'erreur.

Il nous faut donc, en écrivant les nombres, appliquer strictement, non seulement les règles de la numération écrite, mais encore plusieurs autres règles, d'ordre purement matériel, portant les unes sur les chiffres isolés, les autres sur les groupes de chiffres.

### Chiffres isolés.

20. Les caractères appelés *chiffres* doivent être nets et simples. Il y faut éviter les traits superflus, les ornements de tout genre, même les déliés et les pleins. J'ai vu un chiffre 4, imprimé, où les deux barres autres que la verticale étaient tellement fines qu'on ne les distinguait presque plus : il y avait là abus de déliés. Les caractères dont les traits ont une largeur uniforme, constante, sont plus faciles à former et surtout à percevoir. Les chiffres que les imprimeurs français nomment *chiffres bâtons,* et les imprimeurs anglais *Clarendon's figures* remplissent parfaitement cette condition ; c'est ce qui explique l'usage si fréquent qu'on en fait sur les enseignes, les wagons, etc. ; et celui qu'on en devrait faire sur les fiacres, sur les automobiles et, dans les expositions de peinture, sur les cadres des tableaux.

21. *Les meilleurs chiffres sont ceux qui se distinguent le mieux les uns des autres.* Les chiffres 7 et 1 doivent différer absolument : lorsqu'il est bien tracé, le chiffre 7 n'a nul besoin d'être barré. Présentement les chiffres 3 et 5, soit imprimés, soit manuscrits, nous offrent souvent, à leur partie supérieure, un même trait horizontal : sous cette forme, ces deux chiffres se distinguent mal; on peut confondre 33 et 55; c'est là un inconvénient grave : on l'évite en modifiant convenablement l'un au moins de ces chiffres; en composant, par exemple, comme on le fait toujours dans la nouvelle écriture de la musique, le chiffre 3 de deux demi-cercles ou arcs de courbe superposés. Ces fautes, d'ailleurs, ne sont pas les seules : on trouve, en certains livres, des chiffres 3 et 6 formés d'une manière si défectueuse qu'on les peut confondre l'un et l'autre avec le chiffre 8.

### Chiffres réunis.

22. Dans les groupes de chiffres représentant les nombres supérieurs à neuf, les chiffres sont placés les uns à la suite des autres sur une ligne droite horizontale. Ils doivent être bien formés, bien alignés, bien d'aplomb et très nettement séparés : *il ne faut point lier entre eux les chiffres d'un nombre comme on lie entre elles les lettres d'un mot.*

23. Dans certaines Tables numériques, comme celles de Schrön, tous les chiffres sont de même hauteur; dans certaines autres, comme celles de Lalande, de Callet, de Houël, de Dupuis, ils ont des hauteurs inégales : 7 et 9 se prolongent vers le bas; 3, 4, 5, 6 et 8 s'étendent vers le haut; 0, 1 et 2 ne dépassent ni vers le haut ni vers le bas la partie centrale de l'écriture. C'est une question importante pour les imprimeurs de savoir lesquels de ces chiffres doivent être préférés. Les uns et les autres ont leurs inconvénients et leurs avantages. Les chiffres inégaux, par leur inégalité même, rendent les longues suites de chiffres plus faciles à lire; les chiffres tous égaux les rendent moins lisibles, mais cet inconvénient disparaît lorsqu'on partage ces longues suites en parties assez courtes; et les chiffres égaux possèdent, d'ailleurs, l'avantage de pouvoir être plus aisément soulignés ou marqués d'un astérisque. L'essentiel, lorsqu'on a opté entre ces deux sortes de chiffres, c'est de s'en tenir au choix qu'on a fait; de bien calibrer les chiffres; de ne jamais *parangonner,* c'est-à-dire de ne jamais écrire sur une même ligne des chiffres de corps différents.

### Du retournement.

24. Lorsqu'on retourne les chiffres 6 et 9, ils s'échangent entre eux. Lorsqu'on retourne les chiffres 0, 1, 8, écrits comme ils le sont souvent, ils n'éprouvent aucune modification. On observe des faits analogues sur quelques groupes formés de ces mêmes chiffres : 108 et 801 s'échangent; 6699 et 181 restent chacun ce qu'ils sont.

Certains nombres sont parfois écrits en chiffres sur des supports

isolés, susceptibles d'être retournés. C'est ce qui arrive dans les boules du loto, les jetons des vestiaires, les numéros des omnibus. Si ces nombres, dans ce retournement, peuvent se transformer en d'autres, il y a des confusions à craindre. On les prévient en marquant la partie inférieure du nombre par un point ou un trait.

### Des vides.

25. En tout signe, lorsque les éléments sont nombreux, il convient de les partager en plusieurs groupes. C'est ce qu'il faut faire, et ce qu'on fait, en général, lorsqu'on écrit un nombre à l'aide d'une suite de chiffres qui en contient beaucoup.

Dans la plupart des Tables numériques, les suites de sept chiffres se partagent en deux groupes, l'un de trois chiffres, l'autre de quatre; les suites de huit chiffres, en deux groupes de quatre chiffres chacun; les suites de dix, de quinze, de vingt chiffres, en deux, trois ou quatre groupes présentant chacun cinq chiffres. Dans notre numération écrite usuelle, les suites de chiffres se partagent en *tranches de trois* chiffres à partir de la droite; dans la numération écrite anglaise, en *tranches de six* chiffres.

26. De quelque manière que le partage soit effectué, il présente : dans la théorie pure un inconvénient; dans la pratique, plusieurs avantages. Dans la théorie pure, le partage usuel en tranches de *trois chiffres* donne aux unités des quatrième, septième, dixième, ... ordres une importance non justifiée et contraire au principe même de notre numération. Dans la pratique, ce même mode de partage est conforme à la règle que nous venons de citer sur le groupement des éléments nombreux; il rappelle les *classes* de notre numération parlée, qui sont, d'ailleurs, choses de grammaire et non pas de mathématique; il rend les grands nombres plus faciles à lire, à écrire et à manier, puisqu'il en ramène la lecture, l'écriture et le calcul à ceux des nombres inférieurs à mille. Le partage en tranches de *six chiffres* usité en Angleterre présente les mêmes avantages et le même inconvénient.

27. Il sera toujours bon, lorsqu'un ensemble de chiffres en contiendra plus de quatre ou cinq, de le partager en plusieurs groupes.

On effectuera ce partage en laissant, entre les groupes consécutifs, des intervalles suffisamment larges. Mais *il ne faudra jamais, dans ces intervalles, placer un signe quelconque*. En particulier, n'y faudra-t-il jamais placer ni virgule, ni point : la virgule et le point possédant chacun, dans l'écriture mathématique actuelle, une signification spéciale, qui leur est propre, et en dehors de laquelle il ne les faut pas employer.

28. Ainsi, dans l'écriture usuelle des nombres entiers, les chiffres devront se grouper *trois* par *trois* à partir de la droite, les tranches ainsi formées laissant entre elles des intervalles *absolument vides*. Une règle aussi simple devrait être constamment observée : elle est à chaque instant enfreinte. Dans les nombres de plus de trois chiffres gravés sur nos billets de banque, ne se trouve aucune séparation, aucun intervalle; dans ceux que nous offrent les journaux financiers, chaque intervalle contient un point; dans ceux qui figurent sur la plupart des tickets et coupons, chaque intervalle nous présente une forte virgule.

### Disposition à donner aux nombres.

29. L'écriture des Mathématiques n'est pas toujours linéaire; elle exigerait fréquemment plusieurs dimensions; sur le papier, comme sur le tableau noir, nous ne pouvons lui en donner que deux : c'est ce que nous faisons dans nos Abaques, nos Tableaux, nos Tables à double entrée, ainsi que dans la plupart de nos calculs.

Dans les calculs, les nombres doivent en général se placer les uns sous les autres, dans des positions déterminées. Ils doivent former des lignes bien horizontales, nettement séparées par des blancs. On doit donc, en les écrivant, éviter les chiffres dégingandés, qui empiéteraient d'une ligne sur une autre, et ne point trop allonger le trait supérieur du chiffre 6, ni la queue des chiffres 7 et 9.

Les nombres à ajouter ou à retrancher, les produits et les dividendes partiels, les restes successifs des racines carrées ou cubiques, lorsqu'ils sont placés les uns sous les autres, doivent se correspondre chiffre à chiffre. Il faut que les chiffres qui se correspondent ainsi forment des colonnes bien verticales, et que les vides des nombres, se correspondant exactement, forment aussi, pour ainsi

parler, des colonnes bien verticales de vides. Les nombres mal disposés rendent les calculs pénibles et causent une foule d'erreurs.

30. Un nombre quelconque est la somme des valeurs relatives de tous ses chiffres; si donc on écrit des zéros à sa gauche, ce nombre ne change point. Il s'ensuit qu'*on peut donner, à tous les entiers entrant dans un calcul, le même nombre de chiffres.* C'est ce qu'on fait dans les *arithmomètres* et autres machines à calculer; c'est ce qu'on fait aussi dans ces machines, beaucoup plus simples, nommés *numéroteurs*. Cette pratique présente, dans les numéroteurs du moins, un inconvénient et un avantage. L'inconvénient, si par exemple on emploie constamment quatre caractères, c'est de donner à ces entiers l'apparence de nombres tous compris entre 999 et 10000. L'avantage, c'est de prévenir les erreurs qui pourraient résulter de la chute réelle ou supposée d'un caractère : lorsque vous lisez le nombre 354, vous pouvez vous demander si ce n'est pas 1354, 2354, etc., dont le premier chiffre serait tombé; lorsque tous les nombres présentent quatre chiffres, vous lisez 0354 et n'avez nulle hésitation.

31. Le géomètre qui écrit à la craie sur le tableau noir place les nombres où il veut, dans l'ordre qu'il veut; il groupe par des vides, de la façon qui lui convient, les chiffres de chaque nombre et les nombres de chaque colonne; il souligne les données; il sépare à l'aide de traits les différentes parties du calcul; il encadre même, pour le mieux montrer, le résultat final du problème; il jouit évidemment d'une liberté que le typographe ne possède pas : de là la grande *supériorité du tableau noir* pour la recherche et surtout pour l'enseignement.

### Nombres écrits en toutes lettres.

32. On aurait pu écrire les nombres en toutes lettres; mais les nombres ainsi écrits auraient eu tous les défauts des mots qui les représentent et, par conséquent, tous les défauts de la numération parlée. Et, d'ailleurs, au point de vue de la clarté et de la brièveté, quelle différence entre *cinq cent quatre-vingt-dix-sept,* qui exige vingt-six caractères, et 597 qui n'en demande que trois!

33. On ne doit donc jamais employer les nombres écrits de cette façon dans l'écriture proprement dite des Mathématiques; on doit donc toujours les écrire en chiffres. Il est des cas toutefois, non point il est vrai dans le calcul mais dans le texte qui l'accompagne, où l'on peut, pour abréger, désigner les nombres sans les écrire, ni en toutes lettres, ni en chiffres. Supposons que l'on considère 5040 objets. On dira, par exemple, qu'on en prend la totalité, le tiers ou le cinquième, au lieu de dire qu'on en prend 5040, 1680 ou 1008.

34. On peut citer certains cas où des nombres de deux sortes, considérés en même temps, doivent être représentés les uns à l'aide des chiffres, les autres par leurs noms en toutes lettres. Soit, en effet, à écrire cette phrase : *l'équation donnée admet les deux racines* 17 *et* 19. Il me semble bien que, des trois nombres qui y figurent, tout le monde écrira le premier en toutes lettres et les deux derniers en chiffres. Il y a là, selon moi, une distinction à faire, distinction délicate, presque subtile, ressemblant fort à celle que font certaines langues, l'anglais par exemple, entre *un* article indéfini et *un* adjectif numéral. Les nombres qui jouent dans la phrase un rôle plus ou moins analogue à celui de l'article indéfini doivent s'écrire en toutes lettres. Tous les autres, en chiffres.

# CHAPITRE II.

## DES FRACTIONS.

### Généralités.

35. Une *fraction* n'est autre chose qu'une *partie aliquote* de l'unité ou qu'un ensemble de *parties aliquotes égales*. Jusqu'au XVI^e siècle, les nombres de cette sorte se sont nommés nombres *roupts* (¹), c'est-à-dire *rompus*. Le mot *fraction* a étymologiquement le même sens, puisqu'il vient du latin *frangere*, rompre, briser.

36. Toute fraction s'exprime et se représente à l'aide de deux nombres entiers : l'un, appelé *dénominateur*, indique la nature des parties aliquotes que l'on considère; l'autre, appelé *numérateur*, combien on prend de ces parties. Si l'on considère des treizièmes de l'unité et qu'on en prenne sept, on forme la fraction sept treizièmes : le dénominateur est 13; le numérateur 7.

37. Il est bien évident qu'une fraction est inférieure, égale ou supérieure à l'unité, suivant que son numérateur est inférieur, égal ou supérieur à son dénominateur. On donne, en Arithmétique, le moyen de remplacer une fraction plus grande que l'unité par la somme d'un nombre entier et d'une fraction moindre que un. On y donne aussi le moyen de remplacer par une seule fraction la somme d'un nombre entier et d'une fraction quelconque.

38. Certains auteurs réservent exclusivement le nom de *fractions* aux fractions plus petites que l'unité et donnent le nom de

(¹) MICHEL BRÉAL. *Essai de sémantique*, 1 vol. in-8°, Paris, 1897, p. 73 (note).

*nombres fractionnaires* à celles qui sont plus grandes. Cette distinction est inutile, puisqu'il n'y a aucune différence, ni pour l'écriture, ni pour la lecture, ni pour le calcul, entre ces deux sortes de nombres; elle est tout à fait contraire à l'esprit des sciences, où l'on généralise de plus en plus à mesure qu'on s'élève; tout à fait contraire aux usages des Mathématiques supérieures, où l'on représente les nombres par des lettres, sans s'occuper de leur grandeur. Si le nom changeait avec la valeur, comment appellerait-on la fraction ayant pour numérateur $n$ et pour dénominateur $d$, lorsque ces nombres $n$ et $d$ seraient deux entiers inconnus?

### Écriture et lecture des fractions.

39. On écrit une fraction en plaçant son numérateur au-dessus de son dénominateur, et en séparant ces deux nombres par une *barre horizontale*. La fraction sept treizièmes s'écrit $\frac{7}{13}$.

40. Réciproquement, pour nommer une fraction ainsi écrite, on énonce son numérateur, puis son dénominateur, en faisant suivre ce dernier de la terminaison *ième*. Il y a exception lorsque le dénominateur est l'un des nombres 2, 3, 4 : les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ s'énoncent respectivement un *demi, deux tiers, trois quarts*.

41. Très souvent aussi on nomme une fraction écrite en énonçant son numérateur, puis le mot *sur,* puis son dénominateur : la fraction $\frac{17}{29}$ se nomme ainsi *dix-sept sur vingt-neuf*.

Cette seconde manière possède deux avantages : d'abord, elle n'est sujette à aucune exception; ensuite, elle ne produit jamais d'équivoque. Par elle, les deux fractions $\frac{35}{120}$ et $\frac{30}{520}$ s'énoncent de façons très différentes, tandis que, par le premier procédé, elles s'énonçaient toutes deux sous cette même forme *trente-cinq cent-vingtième*.

### Barre de fraction.

42. La barre de toute fraction doit être bien horizontale. Elle doit se placer très exactement sur la *ligne principale* de l'écriture, et juste en face du trait horizontal de celui des signes + ou — qui la précède ou la suit.

Cette barre une fois tracée, et tracée bien horizontalement, le numérateur et le dénominateur doivent s'écrire celui-là au-dessus, celui-ci au-dessous, au *milieu* même de sa longueur. Aucun chiffre de ces deux nombres ne doit arriver à *toucher* cette barre ni, à plus forte raison, à la *traverser*. Dans la pratique, pour bien écrire les fractions, il est bon d'opérer comme nous venons de l'indiquer, c'est-à-dire de commencer par tracer la barre.

43. Lorsqu'une expression numérique présente, au-dessus les unes des autres, plusieurs barres de fraction, il y en a une qui a plus d'importance que les autres, qui est en quelque sorte la *barre maîtresse*. Si on la change, la signification de l'expression change, et presque toujours aussi sa valeur. Cette barre maîtresse doit être un peu plus longue que les autres, et c'est elle qu'il faut placer sur la ligne principale de l'écriture.

Les *fractions continues* nous offrent toujours, au moins, deux barres superposées : elles en présentent parfois une suite indéfinie. C'est la première d'entre elles qui est la barre maîtresse et qui doit être placée sur la ligne principale.

### Barre en biais.

44. Quelques personnes, en écrivant les fractions, tracent la barre *en biais*. D'après ce que nous venons de dire, c'est une faute. Il ne la faut jamais commettre en écrivant aucune expression, aucune équation. Dans les ouvrages imprimés, on la rencontre rarement. Je trouve cependant, en un Traité de Trigonométrie élémentaire,

$$\log b = {}^1/_2[\log(a+c)+\log(a-c)].$$

Cette barre en biais possède toutefois deux menus avantages : d'abord, dans une ligne du texte, la fraction $^3/_4$, par exemple, occupe de haut en bas moins de place que la fraction $\frac{3}{4}$; ensuite, elle se prête mieux à la rapidité de l'écriture. Voilà, sans doute, les deux raisons qui rendent ce mode d'écriture si fréquent dans les factures, comptes, bordereaux. Sur le cours de la Bourse que publient les journaux, nous voyons tous les jours, écrits de cette manière, le 2 $^1/_2$ $^0/_0$ anglais, le 3 $^3/_4$ $^0/_0$ italien, etc., etc.

45. Dans les expressions numériques où la fraction ordinaire qui suit un nombre entier présente ainsi sa *barre en biais,* cette fraction s'ajoute toujours à cet entier; l'expression $3\ ^1/_2$, par exemple, équivaut toujours à $3 + \frac{1}{2}$. Dans la bonne écriture mathématique, telle qu'on la pratique aujourd'hui, l'expression $3\ \frac{1}{2}$, avec la *barre horizontale,* représente, au contraire, le produit de l'entier 3 par la fraction $\frac{1}{2}$. Une foule de livres élémentaires présentent à ce sujet des confusions regrettables. C'est un point sur lequel j'aurai bientôt occasion de revenir et d'insister.

46. Quant au symbole $^0/_0$, employé à la place de la locution *pour cent,* il y aurait, au contraire, une véritable faute à y placer la barre horizontalement. Ce symbole, en effet, ne représente point une fraction; il n'est même point un symbole mathématique. C'est l'une des *abréviations,* en quelque sorte *techniques,* qu'on emploie dans la finance et la comptabilité, concurremment avec plusieurs autres : $^c/_o$, *compte ouvert;* $^c/_c$, *compte courant;* etc., etc.

### Fractions équivalentes.

47. Une même fraction, sans changer de valeur, peut affecter une infinité de formes différentes. Ainsi $\frac{1}{2}$ est égal à $\frac{2}{4}$, à $\frac{3}{6}$, à $\frac{4}{8}$, .... Voilà l'un des premiers exemples de ces expressions, si communes en Algèbre, qui peuvent prendre divers aspects, tout en gardant la même valeur.

On profite de l'*équivalence* de ces fractions et, en général, de toutes ces expressions, de deux manières et dans deux circonstances différentes : lorsqu'on a une fraction ou expression unique, pour la *simplifier;* lorsqu'on en a plusieurs, pour les *rendre comparables.*

48. On simplifie une fraction unique, en divisant ses deux termes par un même nombre; on rend plusieurs fractions comparables, en les ramenant à avoir toutes le même dénominateur. L'Arithmétique donne des procédés faciles pour calculer, dans le cas d'une fraction unique, sa *plus simple expression;* dans le cas de plusieurs, leur *plus petit dénominateur commun.*

### Nombres décimaux.

49. Les *fractions décimales* ne sont autres choses que les fractions ordinaires qui ont pour dénominateurs les *puissances de* 10, c'est-à-dire les puissances de la base même de notre système de numération. Elles doivent à cette particularité de pouvoir s'écrire et, par conséquent, se calculer à la façon des nombres entiers.

50. Le principe fondamental de notre numération écrite, c'est que chaque chiffre placé *à la gauche* d'un autre représente des unités 10 *fois plus grandes*. Ce principe, pris en sens contraire, peut s'énoncer ainsi : chaque chiffre placé *à la droite* d'un autre représente des unités 10 *fois moindres*. Le chiffre placé à la droite du chiffre des unités simples représentera donc des dixièmes; le chiffre placé à la droite de celui-ci, des centièmes; et ainsi de suite. Pour indiquer nettement le chiffre des *unités simples*, on place une *virgule à la droite* de ce chiffre, c'est-à-dire entre le chiffre des unités et celui des dixièmes.

Cette virgule partage le nombre en deux parties : à gauche, la *partie entière;* à droite, la *partie décimale* ou *mantisse*. Les chiffres de cette seconde partie se nomment d'une manière spéciale *chiffres décimaux* ou simplement *décimales*. Dans 31,728, la partie entière est 31; la mantisse est 728; les décimales sont les chiffres 7, 2, 8.

51. Évidemment le nombre complet est supérieur ou inférieur à l'unité suivant que sa partie entière est supérieure ou égale à zéro. Mais, pas plus que pour les fractions ordinaires, nous ne distinguerons ces deux cas par des mots différents. Qu'il soit inférieur ou supérieur à l'unité, le nombre sera toujours pour nous un *nombre fractionnaire décimal,* ou même, pour abréger, un *nombre décimal*.

### Groupement des décimales.

52. Dans la pratique, lorsque les décimales sont nombreuses, on les sépare, à l'aide d'intervalles vides, en groupes de deux, trois,

quatre, cinq chiffres; le plus souvent en groupes ou tranches de trois chiffres, à partir de la virgule. Comme nous l'avons dit à propos des nombres entiers, il ne faut jamais mettre, dans les vides de séparation, ni *point,* ni *virgule,* ni *rien.* Un nombre fractionnaire décimal, s'il est bien écrit, ne contient *aucun point* et ne présente *qu'une virgule.*

53. Le groupement habituel trois par trois, soit des chiffres de la partie entière, soit des chiffres de la mantisse, a l'avantage de faciliter la lecture, l'écriture et le calcul; il a l'inconvénient de donner, en apparence, à certains chiffres décimaux, une importance qu'ils n'ont point en réalité. Mais cet inconvénient n'est pas le seul.

Dans les nombres décimaux, par la nature même des choses, il existe une *symétrie parfaite* autour du *chiffre des unités.* Le premier chiffre à gauche de celui des unités représente, en effet, des dizaines; le premier à droite, des dixièmes; — le deuxième à gauche, des centaines; le deuxième à droite, des centièmes; — et ainsi de suite. Sur le nombre écrit, le mode de groupement employé d'ordinaire, et la place toujours donnée à la virgule, non seulement ne montrent point cette symétrie véritable; mais ils la masquent, et ils mettent en évidence, autour de *la virgule,* une *symétrie mensongère.* Ce mode de groupement et cette place de la virgule sont donc mauvais : au point de vue de la théorie générale des signes, ils constituent deux fautes graves.

54. Ce sont elles qui ont conduit la plupart des Traités d'Algèbre à donner, pour la *caractéristique des logarithmes,* suivant qu'elle est positive ou négative, deux définitions disparates. Lorsqu'on tient compte de la symétrie réelle autour du chiffre des unités, on arrive à cette définition unique, où le changement de signe correspond simplement, comme il convient, à un changement de sens : la caractéristique du logarithme indique le rang du premier chiffre significatif du nombre, *à la gauche* du chiffre des unités, si elle est *positive; à sa droite,* si elle est *négative.*

### Fautes d'écriture.

55. On n'indique point dans tous les pays le chiffre des unités comme nous venons de le faire. En Angleterre et parfois en Belgique,

au lieu de placer une virgule à la droite de ce chiffre, sur la ligne principale de l'écriture, on place vers le haut un simple point qui sépare la partie entière de la partie décimale et qu'on appelle *point décimal*. On écrit ainsi 8·07 au lieu de 8,07.

Quelques Ouvrages imprimés en France nous présentent des faits analogues. Dans les Tables de logarithmes de Lalande, la caractéristique est suivie non pas d'une virgule mais d'un point, seulement ce point est placé comme le serait la virgule, sur la ligne principale. Dans un livre d'Arithmétique élémentaire, le chiffre des unités est séparé de celui des dixièmes par une sorte de tiret : le nombre 7,2318 s'écrit 7-2318.

Quant aux intervalles destinés au groupement des décimales, on ne les laisse pas toujours vides. Dans une certaine Table de logarithmes à 5 décimales, la mantisse est partagée en deux parties séparées par un intervalle où figure un point : la mantisse 15473 se présente sous la forme 15.473.

Ces divers emplois du point constituent autant de fautes : *le point ne doit entrer dans une expression numérique que comme signe abrégé de la multiplication.*

56. Quoi qu'il en soit, la numération des nombres décimaux n'est autre chose qu'une extension de celle des nombres entiers. C'est une numération à *groupement régulier,* où les unités des différents ordres, prises successivement, de gauche à droite, forment une *progression géométrique décroissante* dont la raison est *un dixième*. Comme nous l'avons déjà dit, le grand avantage de cette notation, c'est de rendre le calcul des nombres fractionnaires décimaux analogue sinon identique à celui des nombres entiers. Elle a été publiée pour la première fois par Pitiscus, dans la seconde édition de sa Trigonométrie, parue en 1612. Napier [1] à la vérité l'avait imaginée auparavant, mais il ne l'a fait connaître qu'en 1614.

### Usage des zéros.

57. Considérons un nombre décimal bien écrit, c'est-à-dire présentant une *virgule unique* et des *intervalles absolument vides*.

---

[1] Pitiscus, 1561-1613; Napier, 1550-1617.

Si l'on place un ou plusieurs zéros soit à la gauche, soit à la droite d'un pareil nombre, sans toucher à sa virgule, ce nombre ne change pas de valeur. Il résulte de là deux conséquences importantes.

D'abord, étant donnés plusieurs nombres décimaux, on peut les ramener tous à nous offrir le *même nombre de décimales*. C'est, au fond, une manière infiniment simple de les réduire tous au même dénominateur. Pour l'addition et la soustraction, on peut, théoriquement, les supposer mis sous cette forme; dans la pratique, il est inutile d'écrire les zéros complémentaires et on ne les écrit pas : il suffit de placer les nombres les uns sous les autres de façon qu'ils se correspondent chiffre à chiffre, et que leurs virgules forment une colonne bien verticale. Évidemment, si un nombre entier se rencontrait parmi eux, on le traiterait comme s'il présentait une virgule à la droite de son chiffre des unités.

Ensuite, si un nombre fractionnaire décimal se termine par un ou plusieurs zéros, on peut supprimer tous ces zéros, ce qui revient, au fond, à simplifier la fraction.

58. Mais cette simplification ne peut, ne doit s'effectuer que sur les nombres décimaux connus exactement. Si le nombre 2,340, par exemple, est *exact,* il est juste égal à 2,34 et il peut être remplacé par 2,34. Si ce même nombre est *approché,* en le lisant sous la forme 2,340, on voit qu'il l'est à moins d'un millième; sous la forme réduite 2,34, on pourrait croire qu'il ne l'est qu'à moins d'un centième.

Même dans les Mathématiques pures, les nombres ne sont le plus souvent qu'approchés. C'est ce qui arrive presque toujours pour les logarithmes des Tables. On indique parfois qu'un logarithme est approché par excès en plaçant au-dessous ou à la droite de sa dernière décimale un trait horizontal fort court.

59. La *conversion* des fractions ordinaires en fractions décimales conduit le plus souvent à des *suites périodiques* indéfinies. On est forcé, en les écrivant, de s'arrêter après quelques *périodes*. On fait suivre la dernière d'un certain nombre de points : on écrit, par exemple, 0,5181818....

### Usage des puissances de 10.

60. Pour multiplier un nombre fractionnaire décimal par 10, 100, 1000, ..., il suffit d'en *avancer la virgule* de 1, 2, 3, ... rangs *vers la droite;* pour le diviser par 10, 100, 1000, ..., il suffirait, au contraire, d'en *reculer la virgule* de 1, 2, 3, ... rangs *vers la gauche.* Comme on peut toujours supposer qu'on ait écrit préalablement, soit à la droite, soit à la gauche du nombre décimal donné, un nombre assez grand de zéros, l'avance ou le recul de la virgule, dans la mesure où il est nécessaire, peut toujours être effectué.

61. Il suit de là que, dans un nombre fractionnaire décimal quelconque, on peut toujours amener la virgule à la place qu'on veut, pourvu que, après l'avoir amenée à cette place, on multiplie ou divise le nombre par une puissance convenable de 10; pourvu que, en d'autres termes, on le multiplie finalement par une puissance de 10 présentant un *exposant* convenable, *positif* ou *négatif.* Soit, par exemple, le nombre 3459,87 : on peut l'écrire $34,5987.10^2$, le point qui figure dans cette expression étant le signe abrégé de la multiplication.

62. Il existe des cas où l'on fait un grand usage de cette transformation et où l'on amène toujours la virgule à la droite du premier chiffre significatif du nombre fractionnaire. Cette façon d'écrire, imaginée par les physiciens, est fort avantageuse : en premier lieu, lorsque le nombre donné, étant entier, se termine par une foule de zéros; en second lieu, lorsque ce nombre, étant fractionnaire décimal, commence par des zéros nombreux. Il est évidemment très clair d'écrire les nombres

$$3750000000 \quad \text{et} \quad 0,00000872$$

sous les formes respectives

$$3,75.10^9 \quad \text{et} \quad 8,72.10^{-6}.$$

63. En résumé, les nombres fractionnaires décimaux peuvent

s'écrire de trois manières différentes : à la façon des *fractions ordinaires;* à la façon des *nombres entiers;* sous la forme d'un *produit* où le *multiplicateur* est une *puissance de* 10, dont l'exposant est un entier quelconque, positif ou négatif.

### Nombres dans le texte.

64. Dans l'écriture des nombres décimaux, nous employons constamment la virgule pour marquer le chiffre des unités et, de temps en temps, le point comme signe de la multiplication. Lorsqu'on écrit en chiffres, dans le texte même qui accompagne les calculs, des nombres soit entiers, soit fractionnaires décimaux, il faut faire en sorte que la virgule et le point dont nous venons de parler ne se confondent jamais avec la virgule et le point servant à la *ponctuation* du texte. On y parvient à l'aide de quelques précautions assez simples, dont nous allons donner des exemples.

65. Supposons qu'on doive écrire en chiffres, à la suite les uns des autres, plusieurs nombres entiers; il faudra les séparer par des virgules. Pour bien montrer que ce sont des virgules de ponctuation, on rappellera dans le discours que ces nombres sont entiers; on dira, par exemple, considérons les *nombres entiers* 385, 568, 1357; il serait mauvais de les écrire 385-568-1357, en les séparant par de petits traits.

Supposons qu'on doive écrire en chiffres, à la suite les uns des autres, des nombres les uns entiers, les autres fractionnaires décimaux. Il ne suffirait pas de les séparer seulement par des virgules; on les séparera par des points-et-virgules de cette façon : 12,75; 352; 4,2876.

66. Quant au *point de ponctuation*, il ne faut pas qu'il puisse être pris pour le *signe de la multiplication*. On ne devra donc jamais le faire suivre d'un nombre écrit en chiffres; en d'autres termes, on ne devra jamais commencer une phrase par un pareil nombre. On n'écrira donc pas, au milieu du texte, à la suite d'une phrase terminée, 127 *est un nombre premier*, car 127 aurait alors à sa gauche le point final de cette phrase; il faudra choisir quelque

autre tournure, par exemple celle-ci : *le nombre* 127 *est premier*. Cette dernière précaution, qui est toujours bonne, deviendrait absolument indispensable, si le point séparant les deux phrases se trouvait placé entre deux nombres écrits en chiffres, l'un terminant la première phrase, l'autre commençant la seconde. D'ailleurs, d'une façon générale, il est disgracieux qu'une phrase du texte commence par un nombre écrit en chiffres. Il en est même ainsi pour la phrase initiale d'un alinéa, bien que le nombre qui la commence ne soit précédé d'aucun point.

### Incommensurables.

67. D'après leur définition, les *nombres incommensurables* ne sont ni entiers, ni fractionnaires, et ne peuvent être représentés exactement en chiffres. Ce sont des *nombres fictifs,* d'origines et de natures très diverses. On les a imaginés pour étendre les notions de racine d'un nombre, de rapport de deux grandeurs, de somme d'une série convergente, etc. Nous citerons comme exemples : la racine carrée de 3; le rapport de la circonférence à son diamètre; le nombre qui sert de base aux logarithmes népériens.

68. Quand on effectue des calculs où entrent ces incommensurables, on les y remplace respectivement par leurs valeurs plus ou moins approchées, exprimées d'ordinaire en nombres fractionnaires décimaux. Mais, lorsqu'on veut faire entrer dans des formules les valeurs exactes de ces incommensurables, on y emploie des *notations spéciales* : la racine carrée de 3 se représente par le symbole $\sqrt{3}$, sur lequel nous aurons à revenir; le rapport de la circonférence à son diamètre, par la lettre grecque $\pi$; la base des logarithmes népériens, par la lettre latine $e$.

L'emploi de ces deux lettres $\pi$, $e$ pour représenter ces deux nombres déterminés n'est en réalité qu'une abréviation. Il n'a évidemment rien de commun avec l'emploi qu'on fait en Algèbre des différentes lettres de l'alphabet, pour y représenter les grandeurs variables et les nombres inconnus ou indéterminés.

69. On peut, d'ailleurs, rapprocher de ces deux lettres $e$ et $\pi$,

qui représentent des nombres déterminés, la lettre $i$ et le signe $\infty$. Cette lettre $i$ est celle qu'on emploie pour représenter le symbole *imaginaire* $\sqrt{-1}$. Le signe $\infty$, qui est une sorte de huit couché, représente, comme on dit, *l'infini :* on le place, bien horizontalement, sur la ligne principale de l'écriture.

---

# CHAPITRE III.

## QUANTITÉS DÉTERMINÉES.

### Généralités.

70. Les quantités déterminées se représentent, en général, par le nombre écrit en chiffres qui les mesure, joint à l'indication de l'unité employée pour les mesurer.

Si la quantité à représenter est *discontinue* ou *discrète,* c'est-à-dire n'est que la réunion d'objets semblables, réellement séparés les uns des autres, comme cela arrive pour un sac d'écus, pour un troupeau de moutons, il est naturel de prendre pour unité l'un de ces objets semblables. Lorsque l'unité a été ainsi choisie, le nombre qui mesure la quantité est forcément *entier;* de plus, pour peu que l'on ait compté avec soin, il est rigoureusement *exact.*

Si la quantité à représenter est, au contraire, *continue* ou *concrète,* c'est-à-dire peut s'augmenter d'aussi peu qu'on veut, comme cela arrive pour les longueurs, les poids, les angles, les durées, on peut choisir l'unité arbitrairement; le nombre qu'on obtient est, en général, *fractionnaire;* mais, quelque soin qu'on ait apporté à le déterminer, on ne peut jamais le regarder que comme un nombre *approché.*

### Quantités discontinues.

71. Considérons en premier lieu une quantité discontinue, par exemple l'effectif d'une compagnie, d'un bataillon. On écrira en chiffres le nombre des hommes; puis, en caractères plus petits, à la droite de ce nombre et un peu en haut, soit le mot homme, soit son initiale h. On écrira ainsi : un bataillon de $85^{\text{hommes}}$, ou de $85^{\text{h}}$.

D'ailleurs, il sera bon, pour la quantité à mesurer, de n'employer

qu'une unité dans sa mesure; et d'écrire, comme on vient de le dire, le nom de cette unité ou l'abréviation qui le remplace. Il faudra, répétons-le, que cette abréviation ou ce nom soit placé un peu haut : *la ligne principale de l'écriture devant être réservée toujours, exclusivement, aux chiffres mêmes du nombre.*

### Quantités continues usuelles.

72. Les quantités continues usuelles sont au nombre de sept : les *longueurs,* les *surfaces,* les *volumes,* les *poids,* les *valeurs,* les *durées* et les *angles.* Les cinq premières forment l'objet de notre *système décimal des poids et mesures;* les deux dernières n'en font point partie.

73. Chacune de ces quantités possède, d'ailleurs, plusieurs unités différentes : l'une, *principale;* les autres, *secondaires.* Lorsque ces unités sont de dix en dix, de cent en cent, de mille en mille fois plus grandes ou plus petites, elles forment un *ensemble décimal:* la quantité mesurée se représente par un nombre fractionnaire décimal où l'on ne doit indiquer qu'*une seule unité :* c'est ce qui arrive dans notre système métrique. Lorsque les différentes unités ne sont pas toutes entre elles dans ces rapports décimaux, la quantité mesurée s'exprime à l'aide de ce qu'on appelle un *nombre complexe;* son expression se compose de plusieurs groupes de chiffres, et comporte l'indication de *plusieurs unités.*

74. Quelles que soient, d'ailleurs, les unités employées, elles se représentent chacune par une *abréviation* que l'on écrit, *en caractères plus petits, à la droite et en haut :* dans les nombres fractionnaires décimaux, du chiffre qui précède immédiatement la virgule; dans les nombres complexes, du dernier chiffre de chaque groupe. Nous allons faire connaître, pour ces quantités usuelles, les abréviations qu'il convient, selon nous, d'employer.

### Abréviations dans le système métrique.

75. Le *mètre,* unité principale de *longueur,* se représentera par m; le *décamètre,* l'*hectomètre,* le *kilomètre,* le *myriamètre*

se représenteront par Dm, Hm, Km, Mm; le *décimètre,* le *centimètre,* le *millimètre,* par dm, cm, mm.

76. Le *mètre carre,* unité principale des *surfaces* proprement dites, se représentera par mq, en empruntant l'initiale q du latin *quadratus;* le *décamètre carré,* l'*hectomètre carré,* le *kilomètre carré,* le *myriamètre carré* se représenteront par Dmq, Hmq, Kmq, Mmq; le *décimètre carré,* le *centimètre carré,* le *millimètre carré,* par dmq, cmq, mmq. — L'*are,* unité principale des mesures *agraires,* se représentera par a; l'*hectare,* par Ha; le *centiare,* par ca.

77. Le *mètre cube,* unité principale des *volumes* proprement dits, se représentera par mc; le *décamètre cube,* l'*hectomètre cube,* le *kilomètre cube,* le *myriamètre cube* se représenteront par Dmc, Hmc, Kmc, Mmc; le *décimètre cube,* le *centimètre cube,* le *millimètre cube,* par dmc, cmc, mmc. — Le *litre,* unité principale des mesures de *capacité,* se représentera par l; le *décalitre,* l'*hectolitre,* le *kilolitre, le myrialitre* se représenteront par Dl, Hl, Kl, Ml; le *décilitre,* le *centilitre,* le *millilitre,* par dl, cl, ml. — Le *stère,* unité principale pour le *bois de chauffage,* se représentera par s; le *décastère,* par Ds; le *décistère,* par ds.

78. Le *gramme,* unité principale de *poids,* se représentera par g; le *décagramme,* l'*hectogramme,* le *kilogramme,* le *myriagramme* se représenteront par Dg, Hg, Kg, Mg; le *décigramme,* le *centigramme,* le *milligramme,* par dg, cg, mg.

79. Pour les *monnaies,* l'unité principale est le *franc,* qui se représente par f; les seules unités secondaires sont le *décime,* qu'on n'emploie jamais, et le *centime,* qui se représente par c.

### Remarques sur les abréviations.

80. Dans tout ce qui précède, l'*unité principale* se marque par une ou deux lettres, selon que son nom s'écrit en un mot ou en deux; et, sauf dans le cas des monnaies, les *unités secondaires*

s'indiquent de la façon la plus régulière. Pour les *multiples* de l'unité principale, on fait précéder le signe de cette unité des *majuscules* D, H, K, M, initiales des préfixes grecs *déca, hecto, kilo, myria.* Pour les *sous-multiples,* on le fait précéder des *minuscules* d, c, m, initiales des préfixes latins *déci, centi, milli.*

Ces abréviations sont très régulières et très simples. Ce sont celles qu'on rencontre dans divers Ouvrages techniques et dans plusieurs Arithmétiques, celles qu'on devrait rencontrer partout et qui, dans la pratique, devraient être les seules employées. Malheureusement il n'en est point ainsi.

81. Beaucoup de personnes font *suivre* chaque *abréviation d'un point.* Elles écrivent m. pour mètre; m.q. pour mètre carré; D.m.q. pour décamètre carré; H.a. pour hectare. Il est bien clair que ce point est inutile et que le lecteur n'a nul besoin d'être averti qu'il a affaire à des abréviations.

Est-il plus nécessaire d'écrire fr pour franc, gr pour gramme, st pour stère? Si ces notations fr, gr, st sont surabondantes, il en est *a fortiori* de même de mèt. cub. pour mètre cube; de hectol. pour hectolitre; de kilog. pour kilogramme; de hectog. pour hectogramme; de décig. pour décigramme.

Les abréviations $^{c}/_{m}$ pour centimètre, $^{m}/_{m}$ pour millimètre ne s'expliquent point; et il est tout à fait insuffisant de représenter le kilogramme par k, par kil, par kilo, au pluriel kilos, ces trois abréviations pouvant s'employer aussi bien et pour le kilolitre et pour le kilomètre.

82. Les *abréviations internationales* ne diffèrent de celles que nous avons recommandées que par la suppression des majuscules et l'introduction des abréviations dal, $m^2$, $m^3$. L'abréviation *dal* représente le *décalitre,* bien que *d* rappelle *déci* et que *a* rappelle *are.* Quant aux notations de $m^2$ pour *mètre carré* et de $m^3$ pour *mètre cube,* elles sont fautives pour plusieurs raisons : elles entraînent des difficultés typographiques et doivent souvent s'écrire m2 et m3; elles détruisent l'homogénéité des abréviations en y mêlant des chiffres aux lettres; elles consacrent l'usage des mots carré et cube pour désigner la deuxième et la troisième puissance

d'un nombre, bien que ces mots, dans la suite des noms des puissances, ne soient que des appellations abusives, rompant la régularité de cette suite; enfin, rappelant des opérations arithmétiques, elles font naître, comme nous le verrons plus tard (534, 535), dans l'esprit de beaucoup de lecteurs, des idées entièrement fausses sur la nature même des unités qu'elles servent à désigner.

### Durées.

83. Pour les *durées*, l'*unité principale* est d'ordinaire le *jour solaire moyen*. Les *unités secondaires* sont l'*heure*, qui est la vingt-quatrième partie du jour; la *minute*, qui est la soixantième partie de l'heure; la *seconde*, qui est la soixantième partie de la minute. La seconde se partage ensuite en *dixièmes* et en *centièmes*.

84. Le *jour*, l'*heure*, la *minute*, la *seconde* se représentent respectivement par les initiales j, h, m, s. Ces diverses unités n'étant pas de 10 en 10 fois plus petites, nous sommes tenus de les indiquer toutes, et d'écrire, par exemple, $3^{j}\,17^{h}\,45^{m}\,28^{s},76$, ce qui est un *nombre complexe*.

Évidemment, dans ce nombre complexe formé de quatre groupes distincts, il ne faut pas mettre de virgule entre le groupe des jours et celui des heures; ni entre celui des heures et celui des minutes; ni entre celui des minutes et celui des secondes. Au contraire, il en faut placer une entre le chiffre des secondes et celui des dixièmes de seconde, le nombre $28^{s},76$ étant véritablement un nombre fractionnaire décimal.

D'ailleurs, dans la plupart des problèmes, on est forcé, pour la commodité des calculs, de tout réduire à la plus petite unité. Le nombre ci-dessus devient alors $323\,128^{s},76$; et la durée considérée est représentée par un nombre fractionnaire, relatif à cette seule unité, la seconde.

85. Dans les usages ordinaires de la vie, lorsqu'on n'a nul besoin d'une grande précision, on se borne pour ainsi dire aux *demi-heures* et aux *quarts*. On écrit, par exemple, $3^{h}\,{}^{1}/_{2}$, $6^{h}\,{}^{1}/_{4}$, sans signe +, mais avec une barre en biais. Il me semble qu'on ne traduit jamais

littéralement en chiffres les locutions françaises *une heure moins un quart, deux heures moins cinq;* non plus que les locutions ou phrases allemandes, *dritte-halb, vierte-halb, es ist ein Viertel auf sieben Uhr.*

86. On a proposé récemment de partager l'heure en dixièmes, centièmes, millièmes : les durées s'exprimeraient alors, non plus par des nombres complexes, mais par des nombres fractionnaires décimaux.

On a proposé aussi de compter les heures du jour, non plus en deux séries de douze heures, mais en une suite unique de *vingt-quatre*. C'est ce qu'on fait déjà en Italie et en Belgique. Les Indicateurs des chemins de fer n'auraient plus besoin alors de distinguer les heures du jour de celles de la nuit.

## Angles.

87. La mesure des *angles* se confond, on le sait, avec celle des *arcs de cercle*. L'*unité principale,* nommée *degré,* est la *trois cent soixantième* partie de la circonférence. Les *unités secondaires* sont la *minute d'arc,* qui est la soixantième partie du degré; et la *seconde d'arc,* qui est la soixantième partie de la minute. La seconde se partage ensuite en dixièmes et en centièmes.

Le *degré,* la *minute d'arc,* la *seconde d'arc* s'indiquent respectivement par les signes $^{\circ}\,'\,''$, qui se placent comme les autres signes d'unités. On écrit ainsi un arc de $245^{\circ}36'18'',79$; et, dans ce nombre complexe, il ne faut placer qu'une seule virgule : entre le chiffre des secondes et celui des dixièmes de seconde.

Le nombre complexe qui représente un arc peut se réduire à la plus petite unité, c'est-à-dire s'exprimer en secondes. Il devient alors un nombre fractionnaire décimal, ne présentant qu'une seule indication d'unité.

88. D'ailleurs, il existe plusieurs autres procédés pour exprimer la longueur d'un arc à l'aide d'un nombre fractionnaire décimal. D'abord, on peut prendre le *rayon* pour unité de longueur : c'est ce qu'on fait en *Trigonométrie*. Ensuite, on peut partager le *quadrant*

en *cent* parties égales nommées *grades*, et celles-ci en dixièmes, centièmes, millièmes : c'est ce qu'on fait dans le *Service géodésique* de l'armée française. Enfin, on peut prendre la *circonférence entière* pour unité de longueur, et en évaluer les parties en fractions décimales; dans le nombre fractionnaire représentant l'arc parcouru par un point d'une roue, la partie entière serait alors le nombre des tours effectués par cette roue : des Tables de logarithmes fondées sur ce principe ont été publiées, il n'y a pas longtemps, par un astronome mexicain, M. de Mendizabal-Tamborel.

### Angles et durées.

89. Pour ses usages dans l'Astronomie et la Navigation, la *mesure des angles* est intimement liée à la *mesure du temps;* le nombre complexe qui représente une durée et celui qui représente un angle sont tout à fait analogues. C'est ce qu'on voit sur ces deux nombres

$$27^j 7^h 43^m 11^s,5 \qquad \text{et} \qquad 13^\circ 10' 35'',03,$$

qui expriment respectivement la durée de la révolution sidérale de la Lune et l'amplitude moyenne de son mouvement (¹) dans un jour solaire moyen.

90. Afin de prévenir les confusions qui pourraient se produire dans l'écriture, on indique la *minute* et la *seconde d'arc* par $'$ et $''$; la *minute* et la *seconde de temps* par $^m$ et $^s$. Cette distinction est d'autant plus nécessaire que, dans les Ouvrages destinés aux astronomes et aux marins, on rencontre très souvent, l'un à côté de l'autre, un temps et un arc; par exemple, une ascension droite et une déclinaison. Les coordonnées de l'étoile parue subitement, en février 1901, dans la constellation de Persée (²) étaient $3^h 24^m 25^s$ et $43^\circ 34'$.

Soit négligence, soit ignorance de l'écrivain, cette distinction n'est pas toujours faite. On trouve fréquemment dans les jour-

(¹) *Annuaire du Bureau des Longitudes,* Paris, 1889, p. 156-157.
(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 25 février 1901.

naux et dans toutes sortes d'écrits, même mathématiques, des durées où les minutes et les secondes sont marquées par des accents. Je trouve ainsi $8^j\,19^h\,52'\,16''$.

91. Dans les nombres complexes mesurant des durées ou des angles, et présentant des décimales après le chiffre des secondes, il faut toujours, avons-nous dit, placer une virgule entre ces décimales et ce chiffre, mais il n'en faut jamais placer dans les intervalles qui précèdent : il n'y faut même jamais placer ni point, ni signe quelconque. Certains auteurs y mettent des points : ils écrivent $354^j.8^h.48^m.33^s,6$ et, de même, $23^\circ.27'.9'',38$. J'en ai même trouvé un qui y place des guillemets en cette sorte $3^j$ » $10^h$ » $2^m$ » $15^s$ ». Il arrive parfois, d'ailleurs, que, dans un même Livre, se rencontrent en même temps des nombres où les intervalles dont nous nous occupons sont parfaitement vides, et d'autres où ces intervalles renferment un point chacun.

92. A une époque déjà lointaine, au lieu d'évaluer en fractions décimales les parties de la seconde soit d'angle, soit de temps, on y employait des unités nouvelles qui continuaient le nombre complexe et étaient de 60 en 60 fois plus petites. On les nommait *tierces, quartes, quintes, sixtes;* et on les désignait respectivement [1], au moins quand il s'agissait d'angles, par les nombres correspondants d'accents $'''$, $''''$, $'''''$, $''''''$. Cette manière d'écrire est absolument tombée en désuétude. Je ne sache pas de Livre récent d'Arithmétique où figurent seulement les noms de ces petites unités.

## Autres quantités.

93. Pour les quantités continues usuelles, longueurs, surfaces, volumes, poids, on se sert souvent, dans le Commerce, l'Industrie et les Sciences, d'unités que nous n'avons point fait connaître. On exprime les poids très considérables, ceux, par exemple, des locomotives, machines, charpentes en fer, à l'aide du *quintal métrique*

---

[1] EULER, *Introduction à l'Analyse infinitésimale,* traduction française de Labey, in-4°, t. II, p. 309, Paris, 1797.

et de la *tonne;* les longueurs très grandes, celles, par exemple, que l'on considère en Astronomie, à l'aide du *mégamètre,* qui vaut un million de mètres; les longueurs très petites, celles, par exemple, des ondes lumineuses, à l'aide du *micron,* $\mu$, qui est le millionième du mètre. Pour les poids et les volumes très petits, les physiciens ont recours au *microgramme,* $\gamma$, et au *microlitre,* $\lambda$, qui sont respectivement le millionième du gramme, le millionième du litre.

94. Avant la création du système métrique, les longueurs, les surfaces, les volumes, les poids, les valeurs se mesuraient chez nous à l'aide d'unités très diverses, qui changeaient d'une province à une autre, et qui, n'étant pas pour une même quantité de 10 en 10 fois plus grandes ou plus petites, conduisaient presque toujours à des nombres complexes. Il en est de même présentement dans les différents pays où le système métrique ne s'est pas encore substitué aux anciennes mesures.

Ces pays sont, d'ailleurs, de moins en moins nombreux. On peut espérer qu'ils en arriveront tous à remplacer leurs anciennes mesures par nos mesures actuelles. Au Congrès de Moscou [1], les naturalistes ont décidé que le système métrique serait dorénavant le seul usité en histoire naturelle; que les *brasses,* les *nœuds,* les *milles marins,* le *pied,* le *pouce,* la *livre,* l'*once,* etc., devaient disparaître du langage scientifique; que l'unité de longueur serait toujours, dans les cas ordinaires, le mètre; et, en micrographie, le millième de millimètre. Les mécaniciens, les physiciens, les chimistes ont adopté universellement le *système absolu* C. G. S., qui se déduit du système métrique, et où les unités fondamentales sont : pour les longueurs, le *centimètre;* pour les masses, le *gramme-masse;* pour les durées, la *seconde sexagésimale,* en temps solaire moyen.

95. En dehors de ces quantités continues usuelles, on en considère à présent beaucoup d'autres, en Mécanique, en Physique, surtout en Électricité. Les unités qui leur correspondent se rattachent toutes au système absolu C. G. S. On peut citer parmi elles : en Mécanique et en Physique, la *dyne,* qui est l'unité de force;

---

[1] Août 1891. *Revue Rose,* t. L, p. 459-460.

l'*erg*, qui est l'unité d'énergie; — en électricité, le *weber*, qui est l'unité de courant; le *volt*, qui est l'unité de force électromotrice; l'*ohm*, qui est l'unité de résistance électromagnétique; l'*ampère*, le *coulomb*, le *farad* (1), etc.

Dans l'écriture, on représente chacune de ces unités soit par son nom, soit par une abréviation convenable. Cette abréviation se forme d'ordinaire à l'aide des premières lettres du nom même de l'unité; elle se tire de ce nom à peu près comme les symboles chimiques représentant les équivalents ou les poids atomiques des corps simples se tirent des noms de ces corps.

On emploie souvent les préfixes *méga* et *micro* (2), que nous avons déjà rencontrés, pour indiquer le multiple et le sous-multiple de l'unité principale qui sont un *million* de fois plus grand ou plus petit. On dit ainsi le *mégohm*, le *microfarad*.

### Manières d'écrire.

96. Toutes les mesures anciennes, soit françaises, soit étrangères, conduisent à des nombres complexes; toutes les nouvelles, à des nombres décimaux.

Ces nombres complexes s'écrivent comme ceux qui mesurent les angles et les temps. C'est ainsi que le *kilogramme* (3) s'exprime en *livres, onces, gros* et *grains* par le nombre complexe

$$2^{\text{livres}}\,0^{\text{once}}\,5^{\text{gros}}\,35^{\text{grains}},15.$$

Il faut, comme précédemment, que ce nombre soit partagé en autant de groupes qu'il nous présente d'unités différentes; que l'unité de chaque groupe soit marquée à sa droite et en haut; que les intervalles séparant les groupes consécutifs soient absolument vides, à l'exception du dernier qui, lorsqu'il existe des décimales, doit contenir une virgule.

97. Parmi les unités qui se succèdent dans un nombre complexe, lorsque quelqu'une manque, le plus souvent on ne marque rien à

---

(1) *Annuaire du Bureau des Longitudes*, 1889, p. 576.
(2) JOUBERT, *Traité élémentaire d'Électricité*, in-8°, Paris, 1895, p. 434.
(3) *Annuaire du Bureau des Longitudes*, 1889, p. 307.

la place qu'elle devrait occuper. Il vaudrait mieux, ce me semble, y marquer un zéro. On devrait donc écrire, pour exprimer la longueur du mètre à l'aide des anciennes mesures, non pas

$$1^{m} = 3^{\text{pieds}}\,11^{\text{lignes}},44,$$

mais, en marquant un zéro,

$$1^{m} = 3^{\text{pieds}}\,0^{\text{pouce}}\,11^{\text{lignes}},44.$$

On peut, d'ailleurs, comme pour les durées et les angles, convertir un nombre complexe quelconque en un nombre fractionnaire décimal : il suffit de le réduire à une seule unité. On choisit, en général, une unité assez petite. C'est ce qu'on fait lorsqu'on écrit $18827^{\text{grains}},15$ pour la valeur du kilogramme.

98. Quant aux nombres décimaux auxquels conduisent naturellement les nouvelles mesures des physiciens, il faut les écrire comme nous avons écrit ceux qui correspondaient aux unités du système métrique. Ils devront toujours satisfaire à ces deux conditions : ne se rapporter qu'à *une seule unité,* indiquée un peu haut; ne contenir qu'*une seule virgule* correspondant à cette unité. C'est ce qui a lieu dans le nombre $3587^{\text{dynes}},4$.

Ces deux conditions sont rigoureuses; il faut toujours les observer. Marquer plusieurs virgules, ce serait méconnaître la nature même des nombres décimaux et en rendre le calcul incommode, pénible. Marquer plusieurs unités, ce serait se priver de tous les avantages qu'offre l'emploi de ces mêmes nombres, et revenir tacitement aux nombres complexes. Il faut donc écrire, par exemple : pour une longueur, $25^{m},702$ et non pas $2^{Dm}\,5^{m}7^{dm}2^{mm}$; pour une surface agraire, malgré un usage très répandu, $6^{Ha},095$, et non pas $6^{Ha}9^{a}50^{ca}$.

99. Le *point* ne doit jamais figurer dans ces écritures que comme *signe abrégé de la multiplication;* mais, pris comme tel, il y figure souvent, surtout en Mécanique et en Électricité. Le choix qu'on y a fait des unités fondamentales conduit fréquemment à des nombres très grands ou très petits, c'est-à-dire à des nombres décimaux présentant une foule de zéros sur leur droite ou leur gauche. Pour supprimer tous ces zéros, plusieurs auteurs emploient le procédé que nous avons indiqué plus haut : ils amènent la virgule à la

droite du premier chiffre significatif du nombre, en multipliant par une puissance convenable de 10. Ils écrivent ces deux nombres

$$41\,700\,000^{\text{ergs}}, \qquad 0^{\text{dynes}},00438$$

respectivement sous ces formes

$$4^{\text{ergs}},17.10^{7}, \qquad 4^{\text{dynes}},38.10^{-3},$$

et il est bien certain que ces nouvelles manières d'écrire sont très simples et très claires.

### Préceptes divers.

100. Évidemment, qu'on écrive des nombres décimaux ou des nombres complexes, il faut que les chiffres employés soient bien alignés, bien calibrés, bien d'aplomb. Dans les nombres *décimaux,* il faut que les chiffres de la partie entière comme ceux de la mantisse, s'ils sont un peu nombreux, soient partagés en *groupes.* Dans les nombres *complexes,* il faut que les groupes correspondant aux diverses unités soient toujours séparés par des *vides.*

101. Les Tableaux numériques, ceux de la statistique, par exemple, nous présentent souvent des colonnes de nombres se rapportant tous à des quantités d'une même espèce et exprimés à l'aide de la même ou des mêmes unités. Il faut, dans les nombres ainsi disposés, que les *vides*, les *virgules,* les *indications d'unités* forment respectivement des *colonnes bien verticales.* Dans une colonne uniquement composée de nombres complexes de la même espèce, on peut, sur chaque nombre, marquer les différentes unités ; on peut aussi, et on le fait souvent, ne marquer ces unités qu'une seule fois, au haut des colonnes verticales formées par les chiffres ou groupes de chiffres qui leur correspondent.

Quant à la disposition qu'il convient de donner, dans les calculs, aux nombres que nous considérons ici, c'est-à-dire aux nombres qu'on nommait autrefois *nombres concrets,* nous n'avons point à nous en occuper : les calculs numériques, quels qu'ils soient, ne s'effectuent jamais que sur des *nombres abstraits.*

102. Les nombres concrets figurent seulement au milieu du texte ou dans les équations de définition. En l'un et l'autre cas, ils doivent

s'écrire comme nous l'avons indiqué : les abréviations qui indiquent les unités employées doivent y être, comme toujours, mises en petits caractères à la droite et un peu en haut du chiffre des unités simples. On commet très souvent, surtout pour des raisons typographiques, cette faute de les placer sur la ligne principale de l'écriture. On les y met, d'ailleurs, de différentes façons : tantôt entre la partie entière et la partie décimale, tantôt à la gauche, tantôt à la droite du nombre tout entier. C'est ce qui a lieu sur les exemples suivants que je copie textuellement dans différents Ouvrages : 9 mèt. cubes 640; — francs 31,25; — 0,5130740 toises.

D'ailleurs, l'écriture des nombres concrets au milieu du texte se fait souvent avec beaucoup de négligence. Certains n'indiquent aucune unité : ils écrivent 17,50 pour $17^{f},50$; d'autres ne marquent point de virgule : ils écrivent $0^{m}08$; d'autres même n'indiquent aucune unité et ne marquent aucune virgule : ils écrivent les nombres

32.378.45 et 32 828 72,

qui signifient respectivement

$32\,378^{f},45$ et $32\,828^{f},72$,

et que je copie textuellement dans un journal financier.

### Nombres approchés.

**103.** Les nombres qui mesurent les *quantités continues* ne doivent jamais être regardés que comme des *nombres approchés* (70). Il ne faut donc point, nous l'avons fait observer, supprimer les zéros qui les terminent et en indiquent le degré d'approximation : on ne doit donc point remplacer $2^{m},430$ par $2^{m},43$; ni $15^{h}\,16^{m}\,0^{s},0$ par $15^{h}\,16^{m}$.

**104.** Il est un cas toutefois où l'on peut supprimer, non seulement un ou plusieurs zéros, mais un ou plusieurs chiffres quelconques sur la droite d'un nombre fractionnaire décimal. C'est lorsque ce nombre, donné comme résultant de la mesure directe d'une quantité, nous présente plus de chiffres que la mesure de cette quantité n'en comporte.

Le nombre des chiffres sur lesquels on peut compter, dans la mesure des quantités usuelles, est en réalité assez faible : il est, en général, de trois ou de quatre. Les physiciens et les astronomes, grâce à leurs méthodes et à leurs instruments très précis, ont seuls le moyen de dépasser cette limite [1]; encore ne l'ont-ils que pour les poids qu'ils peuvent obtenir avec six chiffres exacts, et pour les angles qu'ils peuvent évaluer jusqu'aux dixièmes de seconde. On trouve néanmoins, en certains Ouvrages, des longueurs données avec six ou sept chiffres, et des angles évalués en centièmes de seconde. Un métrologiste a calculé avec 17 chiffres la valeur métrique du pied prussien; et je pourrais citer un Traité d'Arithmétique où les rapports des anciennes mesures françaises aux nouvelles nous présentent chacun 24 figures !

105. De même qu'on désigne par les lettres $e$ et $\pi$ certains nombres abstraits, on désigne aussi par des lettres certains nombres concrets approchés, c'est-à-dire certaines grandeurs. Telle est la longueur de $9^{m},80606$, qu'on désigne par la lettre $g$ et qui est, à Paris, l'accélération du mouvement des corps pesants, tombant en chute libre, dans le vide.

---

[1] J. Bourget, *Cours d'Arithmétique à l'usage des élèves de l'Enseignement spécial*, in-12, Paris, 1884, p. 153.

# CHAPITRE IV.

## NOMBRES INDÉTERMINÉS.

### Usage des lettres.

106. Les nombres indéterminés, qu'ils soient, d'ailleurs, abstraits ou concrets, connus ou inconnus, constants ou variables, ne peuvent se représenter à l'aide de chiffres : on les représente par des lettres. On pourrait aussi les représenter par des signes ou caractères spéciaux, créés exprès, selon le besoin. On préfère les lettres parce qu'elles sont des caractères déjà inventés, connus de tous, et possédant chacun son nom.

Cet avantage de *posséder un nom* est d'une importance capitale. C'est l'opinion, en effet, de la plupart des philosophes qui se sont occupés des signes, que nous pensons à l'aide de mots; que nous parlons notre pensée intérieurement, avant de l'exprimer au dehors à l'aide de signes s'adressant soit à la vue, soit à l'ouïe.

107. Si l'on en croit Libri [1], l'usage des lettres pour représenter des objets indéterminés remonterait à Aristote. Pour désigner les nombres et les quantités, il remonte seulement à Viète.

### Lettres employées.

108. On emploie constamment les lettres de l'alphabet latin et, en même temps aussi, très souvent, celles de l'alphabet grec. On leur associe, dans des cas assez rares, des lettres tirées de l'écriture gothique. Wronski a employé une fois la première lettre, *aleph*, de l'alphabet hébreu.

---

[1] Libri, *Histoire des Mathématiques en Italie*, t. I, p. 90.

On peut, d'ailleurs, se servir de toutes les variétés d'un même alphabet et donner aux lettres choisies les dimensions et la vigueur qu'on préfère. On peut aussi incliner les lettres, les affecter d'indices, les accentuer, les souligner, etc. On va jusqu'à les renverser.

### Caractères simples et distincts.

109. En toute écriture, les lettres doivent être simples, nettes, faciles à tracer et à reconnaître. En Mathématiques, où la précision est indispensable, ces conditions évidemment doivent être toutes remplies. Elles le sont parfaitement par les lettres de l'alphabet latin; elles le sont aussi, bien qu'à un degré moindre, par celles de l'alphabet grec; elles ne le sont pour ainsi dire plus par les minuscules, ni surtout par les majuscules, de l'alphabet allemand.

L'un des meilleurs moyens de rendre les caractères simples et clairs, c'est d'en bannir tout ornement, tout élément parasite, tout trait dégingandé passant d'une ligne sur une autre. Peut-être même serait-il bon de supprimer les déliés et les pleins (20), et de donner à tous les traits droits ou courbes, qui composent les caractères, une largeur, une épaisseur constantes.

110. L'important, c'est que les lettres soient assez bien formées pour que l'on n'ait jamais, à les reconnaître, ni hésitation, ni peine. L'important surtout, c'est que deux lettres différentes, employées en même temps, ne puissent jamais être prises l'une pour l'autre. Cette règle est absolue; elle doit être appliquée rigoureusement : *dans les sciences,* pourrait-on dire, *la meilleure écriture est celle où deux caractères différents ne risquent jamais d'être confondus.*

### Lettres que l'on confond.

111. En tout alphabet, les lettres imprimées, majuscules ou minuscules, sont bien supérieures aux lettres manuscrites : leurs formes sont immuables, et les différences qui les distinguent restent toujours ce que l'auteur de l'alphabet a voulu qu'elles fussent. Au contraire, soit négligence, soit maladresse de celui qui les trace, les

lettres manuscrites ont des formes essentiellement variables : leurs différences peuvent s'atténuer, même s'annihiler.

112. Dans les lettres imprimées de l'alphabet latin, comme dans celles de l'alphabet grec, ces différences sont toujours suffisantes. Les seules fautes d'impression imputables à l'alphabet sont celles qui résultent de ce que certaines lettres latines *n* et *u*, *b* et *q*, *d* et *p* s'échangent entre elles lorsqu'on les retourne, comme le faisaient déjà les chiffres 6 et 9.

113. Il s'en faut de beaucoup que ces qualités des lettres imprimées se retrouvent dans les lettres manuscrites. C'est donc en écrivant soit à la craie, soit à la plume, qu'il faut se garder, avec le plus grand soin, de faire naître entre les lettres des ressemblances trop grandes et par suite des confusions. De pareilles fautes se commettent à chaque instant.

Dans l'alphabet grec, on confond ainsi, en écrivant, la lettre ν soit avec la lettre υ, soit avec la lettre γ. Dans l'alphabet latin, on confond de même : parmi les majuscules, E et F ; C et G ; O et Q ; U et V ; parmi les minuscules, *c* et *e* ; *h* et *k* ; *m* et *w* ; *r* et *z* ; *b*, *h* et *p* ; *g*, *j*, *p* et *y* ; *n*, *u*, *v* et *x*.

Quelques personnes ont imaginé de barrer chacune des lettres *z* et *x* d'un petit trait horizontal, afin que ces lettres ne puissent être confondues avec d'autres. C'est ce qu'on faisait déjà pour le chiffre 7.

### Menus détails.

114. Dans l'impression, non plus que dans l'écriture, il ne faut jamais rien oublier de ce qui peut aider à distinguer, à caractériser les lettres. En particulier, il ne faut jamais omettre ni les barres des *t*, ni les points des *i* et des *j*.

115. Les circonstances se rapportant à la hauteur, soit des lettres imprimées, soit des lettres manuscrites, doivent toujours, pour la même raison, être parfaitement indiquées. A la vérité, dans les alphabets grec et latin, les majuscules ont toutes la même hauteur ; mais, heureusement pour la clarté, il n'en est point de même des

minuscules. En latin et en grec, au point de vue de la hauteur, ces minuscules se partagent en quatre sortes : celles qui n'ont juste que la hauteur de la partie centrale ou corps de l'écriture; celles qui dépassent ce corps vers le haut; celles qui le dépassent vers le bas; celles enfin qui le dépassent à la fois vers le haut et le bas.

Les minuscules latines nous fournissent comme exemples : pour la première sorte, *a* et *m*; pour la deuxième, *b* et *d*; pour la troisième, *p* et *q*; pour la quatrième, au moins dans les manuscrits, notre *f* actuel et notre ancien *s* médian. Les minuscules grecques nous fournissent de même : pour la première sorte, α et ε; pour la deuxième, δ et λ; pour la troisième, μ et ρ; pour la dernière, ψ.

Évidemment, tracer les minuscules, en tenant compte de ces diverses circonstances de hauteur, c'est prévenir des erreurs nombreuses, c'est empêcher, par exemple, qu'on ne confonde, comme je l'ai vu faire très souvent, quelques-unes des lettres *h*, *b* et *p*; *a*, *d* et *q*.

### Lettres à formes multiples.

116. L'alphabet grec et l'alphabet latin nous présentent chacun plusieurs lettres possédant des formes multiples. Telles sont : dans celui-ci les minuscules manuscrites *d*, *f*, *r*, *s*, *v*, *w*, *z*; dans celui-là les minuscules manuscrites ou imprimées β, γ, θ, π, σ.

Au point de vue de la théorie générale des signes, ces formes multiples sont fautives puisque, à un même objet, elles font correspondre plusieurs signes. Pour l'usage que nous faisons des lettres, elles sont avantageuses, puisqu'elles enrichissent de caractères nouveaux les alphabets où nous puisons.

117. Lorsque nous ne voulons employer que l'une des formes d'une même lettre, nous pouvons prendre cette forme à volonté; mais, dès que nous l'avons choisie, il faut nous y tenir. Lorsque nous employons à la fois deux formes différentes, ce doit être pour représenter deux nombres différents, et nous ne devons jamais alors prendre l'une de ces formes pour l'autre.

118. Il peut, d'ailleurs, se faire qu'une des formes multiples d'une certaine lettre se rapproche trop d'une autre lettre du même

alphabet. C'est ce qui arrive, dans l'alphabet grec, pour la lettre ω et pour l'une, ϖ, des formes multiples de la lettre π.

### Variétés d'un alphabet.

119. Tout alphabet peut présenter plusieurs variétés. Ses lettres, en effet, peuvent être majuscules ou minuscules, droites ou penchées, marquées peu ou beaucoup, de grandes ou de petites dimensions.

120. Les majuscules, qui n'existent point dans les alphabets orientaux, se rencontrent dans tous les alphabets européens. Elles diffèrent, en général, des minuscules correspondantes, non seulement par la grandeur, mais aussi par la forme. Voilà pourquoi, dans le présent Ouvrage et en dépit de l'étymologie, nous ne remplacerons jamais les mots *majuscules* et *minuscules* par les locutions *grandes lettres* et *petites lettres*.

121. Les caractères *droits* doivent être bien *perpendiculaires* à la ligne principale de l'écriture; les caractères *penchés* doivent être nettement *inclinés* sur cette ligne, doivent faire, par exemple, avec elle, un angle de 50° ou 60°. Il ne faudrait pas employer en même temps deux alphabets composés de lettres penchées ne différant entre elles que par le plus ou moins d'inclinaison.

122. Dire que les lettres peuvent être plus ou moins *marquées*, c'est dire que les traits dont elles se composent peuvent être plus ou moins épais, plus ou moins accusés, plus ou moins noirs; peuvent être, en un mot, plus ou moins *vigoureux*. Ceux qui le sont le plus se nomment *caractères gras*. Il faut que leur grande vigueur les distingue nettement des autres caractères. On peut employer à la fois des caractères ordinaires et des caractères gras; mais il serait très mauvais d'employer simultanément des lettres de trois sortes, ne différant les unes des autres que par l'épaisseur et l'intensité du trait.

123. Quant aux lettres de grandes et de petites dimensions, ce sont des lettres identiques pour la forme, pour l'inclinaison, pour

la vigueur, ne différant entre elles que par leurs dimensions mêmes : ce sont pour nous les *grandes* et les *petites* lettres. En ce sens, nous pouvons parler de grandes minuscules et de petites majuscules. Le rapport des grandes dimensions aux petites doit être de nature à empêcher toute confusion : du double au simple pour le moins. C'est ce rapport qui devra exister, par exemple, entre les lettres O et o; P et p; S et s; V et v; C et c, qui possèdent la même forme et ne diffèrent que par la taille.

On peut employer en même temps, pour les mêmes caractères, trois dimensions différentes : une petite, une moyenne, une grande. Dans une formule d'Algèbre, les lettres ordinaires sont de dimensions moyennes; les indices et les exposants littéraux, de petites dimensions; certaines lettres, telles que les majuscules grecques, employées dans l'expression condensée des sommes et produits, de grandes, pour ne pas dire de très grandes dimensions.

124. Ces différents moyens de modifier les lettres composant un alphabet déterminé ne sont pas les seuls qui existent, mais ce sont les seuls que nous considérions. En les combinant entre eux de toutes les manières possibles, on obtient, pour un même alphabet, *vingt-quatre* variétés.

125. D'ailleurs, sauf la distinction des majuscules et des minuscules, tout ce que nous venons de dire, touchant les systèmes de lettres nommés *alphabets,* s'étend, sans modification, au système des chiffres arabes, au système des signes d'opération, etc. Dans plusieurs de ces systèmes, les signes peuvent être droits ou penchés, plus ou moins vigoureux, plus ou moins grands : de là *douze* variétés, analogues à celles des alphabets.

### Systèmes simultanés.

126. Lorsqu'on emploie en même temps soit deux variétés d'un même alphabet, soit deux alphabets différents, soit un alphabet et un autre système de signes, il se présente parfois, dans les deux systèmes considérés, des signes identiques ou des signes trop ressemblants. Ce sont là des rencontres fâcheuses qu'il importe d'examiner.

127. Dans l'emploi simultané de deux variétés d'un même alphabet, ces ressemblances trop grandes se présentent surtout lorsque, par la négligence du scribe, les différences entre deux caractères sont trop atténuées. Dans un manuscrit où l'on employait à la fois deux variétés de l'alphabet grec, les majuscules et les minuscules, il m'est arrivé de trouver deux caractères qui auraient dû différer beaucoup l'un de l'autre, et qui cependant ne se distinguaient plus : un ε trop grand et un Σ trop petit.

128. Lorsque l'on emploie deux alphabets différents et que ces alphabets présentent des signes identiques, il faut ou bien s'abstenir d'employer ces signes, ou bien ne les employer que comme appartenant à l'un seulement de ces systèmes. L'alphabet latin et l'alphabet grec nous offrent, au moins, treize majuscules identiques : telles sont A, B, M, N. Lorsqu'on se servira en même temps de ces deux alphabets, il faudra ou bien n'employer aucune de ces majuscules, ou bien les regarder toutes comme appartenant au même alphabet : on les regarde d'habitude comme appartenant à l'alphabet latin.

En dehors, d'ailleurs, de ces caractères identiques, il existe dans l'alphabet latin et l'alphabet grec, surtout manuscrits, d'autres majuscules ou couples de majuscules qui se confondent facilement : telles sont A, Δ et Λ; Θ et O; Π et TI. Ces deux alphabets encore nous présentent des minuscules qui, à la vérité, ne sont pas identiques, mais qui se ressemblent beaucoup. Ce sont, par exemple, α et *a*; β et *b*; δ et *d*; κ et *x*; ν et *v*. Il faudra, afin de prévenir toute confusion entre ces lettres, en augmenter la différence ou, pour mieux dire, l'exagérer.

129. On rencontre enfin, dans quelques écritures manuscrites, des chiffres arabes qui ressemblent trop à certaines lettres ou même qui leur sont identiques. J'ai vu, dans des comptes, des chiffres 5 et des chiffres 8 qui rappellent tout à fait la minuscule grecque δ. D'ordinaire, les chiffres 1, 2, 5, 6, 9 ressemblent trop respectivement aux minuscules latines *i*, *z*, *s*, *b*, *q*. De même le chiffre 1, lorsqu'il est un peu grand, ressemble trop à la majuscule I. Le nombre deux, écrit en chiffres romains sous la forme II, ressemble trop à la majuscule grecque Π. Afin d'empêcher toute confusion, il faudra former le mieux possible et ces chiffres et ces lettres; on

aura bien soin : de mettre un point sur la lettre *i*; de prolonger la lettre *z* vers le bas; de donner au chiffre 5 celle de ses deux formes qui ne rappelle point la lettre *s*; de courber, dans les chiffres 6 et 9 les traits des lettres *b* et *q*, qui dans ces lettres sont droits. Pourquoi en Algèbre n'emploie-t-on jamais la lettre o pour représenter un nombre indéterminé? Parce qu'elle se confond par sa forme avec le chiffre zéro.

### Variétés usitées.

130. Dans les Mathématiques actuelles, on emploie, comme variétés de l'écriture latine, la romaine, l'italique et la ronde. Les caractères de ces trois variétés, qu'ils soient, d'ailleurs, imprimés ou manuscrits, se distinguent très bien les uns des autres. L'italique est penchée, la romaine et la ronde sont droites. — Pour l'écriture grecque, on n'emploie jamais que deux variétés, la droite et la penchée.

Dans chacune de ces variétés grecques ou latines, on peut du reste employer des majuscules ou des minuscules; des caractères ordinaires ou des caractères gras; des lettres de grandes, de moyennes ou de petites dimensions. Les *caractères gras* possèdent cette propriété précieuse de se détacher, ou, comme on dit, de ressortir nettement au milieu des autres lettres. Les *majuscules rondes* ressortent encore mieux.

131. Les lettres employées doivent, avons-nous dit, être toutes de même grandeur. Il en est de même des chiffres qui leur sont associés. Il serait, en particulier, mauvais qu'un chiffre servant de coefficient fût d'un autre corps que la lettre qui le suit.

Les lettres ne doivent jamais être *jointes les unes aux autres;* elles ne doivent point même être trop rapprochées. On peut toutefois employer, pour représenter un nombre, une quantité, l'une des *lettres liées* du latin ou du grec. On représente ainsi l'ascension droite d'un astre par le caractère Æ.

Dans l'impression, les chiffres, les signes d'opération, de groupement, de comparaison sont toujours droits; mais les lettres sont tantôt droites, tantôt penchées. Dans les Ouvrages publiés en Allemagne, les lettres latines et les lettres grecques sont penchées; mais

il existe des exceptions, car les *Fundamenta Nova* (1) de Jacobi (2) ne nous présentent que des caractères droits. Dans la plupart des Ouvrages imprimés en France, les lettres grecques sont droites, les majuscules latines le sont aussi; mais les minuscules sont penchées, de telle sorte que le binome $P+p$, par exemple, nous présente cette anomalie choquante, d'une majuscule droite associée à une minuscule penchée. Pourquoi emploie-t-on partout en France, dans l'impression mathématique, ces minuscules penchées? Afin, sans doute, qu'elles se distinguent mieux lorsqu'on les introduit dans le texte qui accompagne les calculs. Mais alors ne vaudrait-il pas mieux, dans l'écriture algébrique imprimée, prendre un parti bien franc, bien radical, et n'employer absolument que des chiffres, lettres et signes penchés?

### Alphabets hébreu, gothique, russe.

132. Comme nous l'avons dit, dans l'écriture des Mathématiques on n'emploie pour ainsi dire jamais que les lettres grecques et latines. Nous avons cité un exemple de l'emploi d'une lettre hébraïque et nous avons dit quelques mots des caractères gothiques ou allemands.

133. L'alphabet *hébreu* est peu connu, et plusieurs de ses lettres se ressemblent trop. Telles sont celles qui correspondent respectivement à nos consonnes $z$ et $n$; $m$ et $s$; $t$ et $m$; $v$ et $z$; $d$ et $r$; etc. Voilà plus de raisons qu'il n'en faut pour qu'on ne fasse point usage de cet alphabet.

134. Les caractères *gothiques* ou *allemands* manquent de simplicité. Dans l'écriture manuscrite, ils se distinguent mal; dans l'imprimée, plusieurs peuvent facilement se confondre; tels sont : parmi les minuscules, $c$ et $e$; $f$ et $s$ médian; $n$ et $u$; $r$ et $x$; parmi les majuscules, B et V; C et E; G et S; N et R; O et Q. L'alphabet gothique ne saurait donc, dans l'écriture mathématique, devenir

(1) In-4°, *Regiomontani*, 1829.
(2) Né en 1804, mort en 1851.

d'un usage courant. En Allemagne même, il ne s'y emploie pas : le *Journal de Crelle,* les *Archives de Grünert,* les *Mathematische Annalen,* l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* sont imprimés en caractères latins. Si plusieurs géomètres ou physiciens, allemands, français, anglais surtout, emploient de temps en temps, dans leurs équations et leurs calculs, des caractères gothiques, majuscules ou minuscules, c'est que ces caractères ressortent nettement parmi ceux qui les entourent. On pourrait, d'ailleurs, les y remplacer, comme le font déjà plusieurs auteurs, par les lettres de l'écriture ronde, qui sont beaucoup plus simples, qui se distinguent au moins aussi bien, et dont l'usage a été récemment recommandé ([1]).

135. L'alphabet *russe,* dont nous n'avons encore rien dit, comprend trente-six caractères ou lettres. Ces caractères sont pour la plupart simples et nets; mais ils ne se distinguent pas toujours très facilement les uns des autres. Ils ressemblent, en général, aux caractères latins ou aux caractères grecs; on n'en compte guère plus de six qui possèdent une forme originale. Ces derniers, ce nous semble, pourraient, dans certains cas, être employés utilement. Nous citerons surtout comme tels la consonne qui remplace notre *j*, et celle qui équivaut à notre groupe *ch*.

### Accents et indices.

136. Toutes les lettres, avons-nous dit, peuvent être *accentuées,* affectées d'*indices, soulignées,* etc.

Les *accents* employés sont des *accents aigus,* $'\ ''\ '''$, placés à la droite et en haut de la lettre. C'étaient primitivement des *chiffres romains* ([2]). Aujourd'hui encore, lorsque leur nombre dépasse 3, on les remplace par l'expression de ce nombre, écrite à la même place, en chiffres romains très petits. Rien n'empêcherait, selon nous, de placer aussi, à la gauche et en haut de la lettre, des *accents graves,* qui seraient analogues aux précédents et qu'on

([1]) *Congrès électrotechnique de Francfort,* 1891.
([2]) EULER, *Algèbre,* traduction française, Lyon, 1774, t. II, p. 508, 643.

utiliserait de même. On en trouve déjà d'ainsi placés dans quelques Ouvrages imprimés au commencement du XIX^e siècle. Les *astérisques*, d'ailleurs, qu'on emploie quelquefois comme accents, se placent toujours à gauche et en haut.

Les *indices* s'écrivent à la droite et un peu en bas de la lettre. Parfois, abusivement, on les place à la droite et en haut; mais il faut alors les mettre, par exemple, entre parenthèses afin d'empêcher qu'on ne les prenne pour des exposants. On pourrait aussi placer de tels indices à la gauche et un peu en bas. Quelque part qu'on les place, ces indices seront toujours des nombres écrits en chiffres arabes très petits ou représentés par de très petites lettres. Rien de disgracieux comme une lettre minuscule affectée d'indices trop grands.

137. Évidemment, à ces différents signes, qu'on place aux quatre coins de la lettre majuscule ou minuscule, on en pourrait associer ou substituer d'autres, qui se placeraient juste au-dessus de cette lettre ou juste au-dessous. Ne pourrait-on pas *souligner* la lettre; mettre *au-dessous d'elle* un ou deux points; une sorte de virgule semblable à notre cédille; un trait analogue à celui de l'iota souscrit? Ne pourrait-on pas placer, *au-dessus*, un ou plusieurs points comme on le faisait pour les *fluxions* (¹), comme on le fait encore en Chimie et en Minéralogie? N'y pourrait-on pas placer un double accent pareil à notre tréma ou au signe d'inflexion des voyelles allemandes; un accent circonflexe; un trait horizontal analogue au tilda de l'espagnol et du portugais?

138. On rencontre, dans les Ouvrages et Mémoires récents, des lettres surmontées soit de flèches horizontales, soit d'arcs de courbe concaves ou convexes; on y rencontre aussi des lettres comprises entre traits verticaux simples ou doubles, entre parenthèses, entre crochets. Ces notations peuvent être variées à l'infini. Il en faut expliquer la signification, de la façon la plus précise, juste à l'instant où on les introduit.

139. De même que les lettres, les nombres écrits en chiffres, soit

(¹) COLIN MACLAURIN, *Abrégé du Calcul intégral*, traduction française, in-8°, Paris, 1765, p. 21.

romains soit arabes, peuvent être affectés de toutes ces menues marques que les grammairiens nommeraient des *signes diacritiques,* et qui sont, dans la théorie générale des signes, ce que nous avons nommé des *éléments modificateurs.*

**140.** Quoi qu'il en soit, *il faudra avoir grand soin de ne point réunir, par un trait, ces modificateurs à la lettre ou au nombre qu'ils affectent. Il faudra avoir grand soin aussi de mettre exactement à leurs places respectives les accents et les indices.* On ne risque rien de mettre les premiers un peu haut, les seconds un peu bas; mais il serait imprudent, pour ne pas dire dangereux, qu'un accent ou un indice vînt se placer sur la ligne même de l'écriture ou dans le voisinage immédiat de cette ligne.

### Indices nombreux ou compliqués.

**141.** Une lettre quelconque peut offrir à la fois, en une même place, deux ou plusieurs indices. On écrit tous ces indices sur une ligne, à la suite les uns des autres, en les séparant par des virgules. On représente ainsi par $A_{m,n,p}$ une *variante* à trois indices; par $a_{p,q}$ l'élément général d'un *déterminant ordinaire;* par $a_{p,q,r}$ celui d'un *déterminant cubique.* Rien n'empêcherait de faire suivre le dernier indice d'une virgule, et cette virgule de points analogues à nos points suspensifs : ce serait le moyen d'indiquer qu'en dehors des indices marqués il en existe encore d'autres, en nombre déterminé ou indéterminé.

**142.** Il serait évidemment mauvais de supprimer les virgules qui séparent les indices successifs. Il le serait aussi d'employer des indices trop nombreux. *A fortiori* le serait-il d'employer, comme dans $B_{m',m'',\ldots}$, comme dans $C_{n_1,n_2,\ldots}$, des indices affectés eux-mêmes d'indices ou d'accents.

Lorsqu'on ne peut éviter de telles complications, il faut les atténuer le plus possible, en écrivant avec grand soin; en choisissant des caractères très petits; en donnant aux indices des différents ordres des dimensions de plus en plus faibles, sans toutefois nuire trop à la netteté. Pourquoi emploie-t-on si souvent comme indices

les lettres $i$ et $j$? Parce que, de gauche à droite, elles occupent peu de place.

Ne serait-il pas bon aussi que deux indices successifs fussent tous les deux droits ou tous les deux penchés? J'ai sous les yeux un Mémoire, qui date de moins de vingt ans, où certaines lettres nous offrent chacune deux indices représentés le premier par une lettre, le second par un chiffre : le chiffre est droit et la lettre penchée.

143. Nous trouverons plus tard des lettres affectées d'indices négatifs ou fractionnaires, d'indices entre parenthèses, d'indices constitués par des fonctions; nous rencontrerons des majuscules portant au-dessus et au-dessous d'elles des égalités véritables. Ces complications, comme nous le verrons, proviennent surtout de ce qu'on veut faire dire aux signes une foule de choses, souvent inutiles, qui seraient mieux placées dans le texte. Quoi qu'il en soit, les auteurs devraient le plus possible éviter de pareilles notations. Certains d'entre eux, au contraire, semblent mettre à profit tous les progrès de l'impression mathématique pour écrire d'une manière de plus en plus chargée, de plus en plus compliquée!

# CHAPITRE V.

## SIGNES D'OPÉRATIONS.

### Les sept opérations fondamentales.

144. Les *opérations fondamentales* de l'Arithmétique et de l'Algèbre sont au nombre de *sept* (1) : l'*addition* avec son inverse, la *soustraction;* la *multiplication* avec son inverse, la *division;* l'*élévation aux puissances* avec ses deux inverses, la *recherche de la racine* et la *recherche de l'exposant* (2).

### Signes + et —.

145. Le signe de l'*addition* est le signe +, qu'on prononce *plus,* et qui se compose de deux traits, l'un horizontal, l'autre vertical, celui-ci légèrement moins long que celui-là. Le signe de la *soustraction* est le signe —, qui se prononce *moins,* et qui consiste en un simple trait horizontal. L'invention du signe + et celle du signe — sont attribuées par les uns à Henri Grammaticus, par les autres à Jean Widmann d'Eger (3).

146. Ces deux signes doivent être tracés avec grand soin; ils doivent être disposés bien horizontalement, c'est-à-dire bien parallèlement au bord supérieur ou inférieur de la page; ils doivent être placés sur la ligne principale de l'écriture, et y être placés d'autant plus exactement que ce sont eux surtout qui en fixent, qui en déterminent la position. Comme nous l'avons déjà dit (42), c'est en

(1) *Programme de* STEINER (*Enseignement mathématique,* t. I, p. 218).
(2) BOURGET, *Journal de Mathématiques élémentaires,* t. II, p. 12.
(3) Henri Grammaticus, 1518; Jean Widmann d'Eger, 1489.

face d'eux, ni plus haut ni plus bas, que se doivent mettre les barres de fractions.

147. Les polynomes entiers se composent de monomes séparés par les signes + ou —. Dans les calculs, chaque monome, si compliqué qu'il soit, se comporte comme un tout, comme un bloc insécable; et les monomes différents ne se confondent, ne se mêlent jamais. Pour que ces monomes paraissent dans l'écriture aussi distincts, aussi indépendants qu'ils le sont dans la réalité, il importe que les signes + ou — qui les séparent possèdent chacun, dans le sens horizontal, une *assez grande longueur*.

148. Ces mêmes signes + et — présentent chacun, à droite et à gauche, des parties identiques; ils sont, comme on dit en Géométrie, *symétriques* par rapport à un axe vertical. C'est une qualité pour le signe +, puisque la somme $a + b$ est une fonction symétrique des nombres $a$ et $b$. C'est un défaut pour le signe —, puisque la différence $a - b$ n'est pas une fonction symétrique de ces mêmes nombres. Au point de vue de la théorie générale des signes, + est bien fait, — ne l'est pas.

### Nombres positifs et négatifs.

149. Créés pour indiquer l'addition et la soustraction, les signes + et —, toujours employés à cet usage, s'emploient aussi, depuis Descartes, à distinguer les unes des autres les grandeurs de même nature qui sont portées ou comptées *en sens contraires*. Ils sont, à présent, non seulement des *signes d'opération*, mais aussi des *signes de direction*.

150. On connaît les immenses avantages qu'ont retirés, de l'introduction des nombres *positifs* et *négatifs*, les différentes parties des Mathématiques. C'est grâce à cette introduction que les formules de l'Algèbre et celles de la Mécanique ont pu être rendues tout à fait générales; grâce à cette introduction aussi que la Géométrie analytique [1] doit de pouvoir distinguer, bien qu'ils aient des

[1] CHASLES, *Aperçu historique*, p. 41.

coordonnées identiques en valeur absolue, deux points sur une droite, quatre sur un plan, et huit dans l'espace.

151. Lorsque des nombres sont inférieurs à l'unité, leurs *logarithmes* ont, comme on sait, des *caractéristiques négatives*. Dans chacun de ces logarithmes, la caractéristique est donc négative et la mantisse positive. Pour qu'on voie bien que le signe — de la caractéristique n'affecte qu'elle seule, on le met, non point en avant du logarithme, mais *au-dessus* de la caractéristique. Il faut évidemment que ce signe — soit placé bien exactement au-dessus d'elle, et qu'il soit tracé bien horizontalement.

152. On ne doit jamais supprimer, entre deux nombres, ni le signe $+$ ni le signe $-$; en d'autres termes, on ne doit jamais supprimer ces signes lorsqu'ils indiquent des opérations; on ne doit jamais, par exemple, remplacer $3 + \frac{1}{2}$ par $3\frac{1}{2}$. Au contraire, on est dans l'usage, lorsqu'on prend isolément le nombre $+8$, de le regarder comme identique au nombre 8, c'est-à-dire de supprimer le signe $+$, considéré alors comme signe de direction; en théorie, cette dernière suppression est fautive, puisqu'il y a dans $+8$ une idée de sens qui ne se retrouve point dans 8; mais, pour la pratique, il n'en résulte aucun inconvénient.

### Signes de la multiplication.

153. La *multiplication* s'indique par le signe $\times$ que l'on place entre le multiplicande à gauche et le multiplicateur à droite, et que l'on prononce *multiplié par*. Ce signe doit être bien formé, bien d'aplomb, et placé bien exactement sur la ligne principale de l'écriture. Il faut empêcher à tout prix qu'on le puisse jamais confondre avec la majuscule X.

D'après ce que nous venons de dire, $a \times b$ diffère logiquement de $b \times a$. Mais, lorsque $a$ et $b$ sont des nombres *abstraits*, c'est-à-dire des nombres proprement dits, ces deux expressions s'équivalent : le *produit* de deux nombres est une *fonction symétrique* de ces nombres.

154. Un *monome entier* n'est qu'un *produit de plusieurs fac-*

*teurs*. Quel que soit le nombre de ces facteurs, ce monome se traite d'ordinaire comme un tout, comme une lettre unique. Ces facteurs doivent donc être regardés comme liés entre eux étroitement. Voilà pourquoi ils doivent être rapprochés les uns des autres. C'est pour permettre ce rapprochement qu'on diminue la grandeur du signe $\times$, qu'on le remplace par un *simple point*, ou même qu'on le *supprime* tout à fait. On écrit à volonté $a \times b$, ou $a.b$, ou $ab$. La première de ces notations est due à Oughtred, la deuxième à Leibniz, la troisième à Harriot ou à Stiefel [1]. Ces différentes manières d'écrire possèdent, d'ailleurs, toutes les trois, ce réel avantage de bien montrer que le produit de deux facteurs est une fonction symétrique de ces deux facteurs.

155. Entre deux lettres, on supprime toujours le signe de la multiplication; entre un nombre et une lettre, on le supprime aussi, on écrit $5a$, et non pas $5 \times a$, ni $5.a$; entre deux parenthèses, on le supprime encore, bien que Laplace [2] écrive

$$(x+1).(x+2).(x+3);$$

entre une lettre et un nombre, on le remplace par un point : on écrit $a.5$ et non pas $a5$. Entre deux nombres entiers, on ne peut le supprimer, sous peine d'écrire le produit $3 \times 8$, par exemple, comme le nombre 38 : on peut aussi le marquer par un point. Mais, dès que l'un des facteurs est un nombre fractionnaire décimal, il faut employer le signe $\times$ et écrire, par exemple, $3,5 \times 7,8$ et non pas $3.5.7.8$ : le point, comparé aux virgules, ne serait plus alors suffisamment important.

156. Comme nous l'avons déjà dit, lorsqu'on écrira des expressions arithmétiques ou algébriques au milieu d'un texte en langage ordinaire, il faudra éviter avec le plus grand soin que le point de la *multiplication* ne se puisse confondre avec le point d'*abréviation*, ou le point de *ponctuation*.

En Arithmétique, d'ailleurs, comme en Algèbre, si l'un des facteurs d'un produit est une fraction ordinaire, il suffit de l'écrire à

---

(1) Oughtred, 1631; Harriot, 1631; Stiefel, 1544.

(2) *Théorie analytique des probabilités.*

côté de l'autre pour que la multiplication soit clairement indiquée. Pour toute personne familière avec l'écriture mathématique, $a\frac{b}{c}$ et $7\frac{2}{3}$ signifient $a \times \frac{b}{c}$ et $7 \times \frac{2}{3}$. Si, dans la Finance, on écrit $7\,{}^{2}/_{3}$, avec une barre en *biais*, à la place de $7 + \frac{2}{3}$, cette expression est mauvaise; mais la barre en biais prévient toute ambiguïté, avertissant nettement le lecteur que l'expression considérée appartient à une écriture qui n'est point celle des Mathématiques.

157. Lorsque le premier facteur d'un monome est un nombre, ce nombre s'appelle *coefficient*. Lorsque ce coefficient est égal à l'*unité*, on le *supprime*. Bien qu'on écrive $2a$, $3a$, ..., on n'écrit pour ainsi dire jamais $1a$. C'est là une abréviation sans inconvénient, fort analogue à l'une de celles que nous présente la numération parlée, où l'on dit, par exemple, *trois* cents, *cinq* mille; mais non pas *un* cent, *un* mille.

### Suppression du signe $\times$.

158. Au point de vue de la théorie stricte, la suppression du signe de la multiplication entre les deux facteurs d'un produit n'est pas tout à fait exempte d'inconvénient. A ce point de vue peut-être aurait-on dû se contenter de remplacer ce signe par un point.

159. D'abord, cette suppression totale conduit à des fautes grossières, où ne tombent d'ordinaire que les commençants les plus étourdis, mais contre lesquelles il convient de les prémunir. Il faut leur dire que dans AB, qui représente un segment de droite, A et B ne sont pas les deux facteurs d'un produit; que dans $\Delta x$ et $dx$ les lettres $\Delta$ et $d$ ne multiplient pas $x$; et qu'il en est de même, dans $\log x$, $\sin x$, $\operatorname{tang} x$, pour les caractéristiques log, sin, tang.

160. C'est peut-être cette même façon de représenter les produits par le simple rapprochement des facteurs qui a conduit une foule d'auteurs à regarder les permutations des lettres $a$, $b$, $c$, ... comme des produits, et à les nommer des produits, bien que ces

permutations ne soient point du tout des produits, et que, le plus souvent, elles ne soient pas même des nombres.

**161.** Cette suppression enfin n'est peut-être pas étrangère à l'extension démesurée qu'ont prise, en Mathématiques, la notion et le mot de *multiplication*. Je ne veux pas parler ici des produits géométriques, ni de la multiplication soit intérieure, soit extérieure de Grassmann. Mais on en est arrivé, lorsqu'on fait subir à une expression algébrique quelconque A, une *modification*, une *transformation* qu'on désigne par B, à dire qu'on *multiplie* A par B; à appeler *produit* le résultat de cette opération; et à le représenter par AB. C'est ce qui a lieu, en particulier, dans la théorie des *substitutions*. Quoi d'étonnant alors qu'on rencontre, parmi les produits ainsi définis, des produits de deux facteurs où ces deux facteurs ne peuvent être intervertis !

### Signes de la division.

**162.** Il existe deux signes pour la division : la *barre horizontale* et le *signe* : formé de deux points superposés. Le quotient de $a$ par $b$ s'écrit donc tantôt $a : b$, tantôt $\frac{a}{b}$. Il s'énonce : dans le premier cas, *a divisé par b;* dans le second, *a sur b*. La première de ces notations est due à Leibniz, la seconde à Fibonacci [1]. Au point de vue de la théorie générale des signes, il est mauvais évidemment qu'une même opération ait deux signes différents.

Le signe : est un vestige des anciennes notations mathématiques; il est court et net; mais il a le défaut d'être symétrique à droite et à gauche, c'est-à-dire d'être le *signe symétrique* d'une *opération dissymétrique*. On l'emploie de moins en moins. Il est cependant deux cas, mais deux seulement, où l'on gagne à s'en servir. D'abord, lorsqu'il s'agit d'écrire le quotient de deux rapports, comme on le fait, par exemple, quand on représente le rapport anharmonique de quatre nombres; par l'emploi du signe : on évite alors les barres superposées. Ensuite, lorsqu'il s'agit d'écrire le quotient de $a$ par $b$, au milieu d'un texte en langage ordinaire; l'expression $a : b$, en

---

[1] *Liber Abaci*, 1202.

effet, offre cet avantage typographique de ne point nécessiter, comme le ferait $\frac{a}{b}$, un plus grand écart entre la ligne où elle figure et les deux lignes qui comprennent celle-là.

La notation $\frac{a}{b}$ est excellente. Elle est courte; elle est nette; elle n'établit nulle symétrie entre le dividende et le diviseur, car, dans les écritures où les lignes sont horizontales, la symétrie de haut en bas n'est pas une symétrie véritable. Enfin, elle est la même que pour la fraction et le rapport, ce qui devait avoir lieu puisque la fraction et le rapport ne sont que des quotients.

163. Comme nous l'avons déjà dit (42) en parlant des fractions, la barre de division doit être placée sur la ligne principale de l'écriture, *bien horizontalement, bien en face* des signes + et —. Dans les expressions où entrent plusieurs barres de cette sorte, il faut placer sur la ligne principale la plus importante d'entre elles. Il y faut placer la première dans le cas particulier des fractions continues.

La barre de division doit toujours être aussi longue, au moins, que la plus longue des expressions entre lesquelles elle se trouve. C'est là une nécessité. C'est aussi un avantage, comme nous le montrerons bientôt en parlant des signes de groupement.

164. On peut remarquer que la barre horizontale s'emploie, dans l'écriture mathématique, à différents usages. Placée au-dessus d'un nombre, elle indique que ce nombre est négatif; c'est ce que nous avons vu pour la caractéristique des logarithmes. Placée au-dessous, elle indique, en certaines Tables, que le nombre est approché par excès. Placée sur la ligne principale de l'écriture, elle constitue tantôt le signe *moins,* tantôt le signe *divisé par;* mais, dans ce dernier cas, il n'y a nulle ambiguïté à craindre, le signe *moins* n'ayant jamais rien au-dessus ni au-dessous de lui, et le signe *divisé par* nous présentant constamment un nombre au-dessus et un au-dessous.

A la vérité, dans le mélange de l'écriture mathématique et de l'écriture usuelle, le signe : de la division peut se confondre avec le signe : de la ponctuation; aussi marque-t-on parfois le premier de ces signes beaucoup plus fort que le second. Le signe *moins* pour-

rait de même se confondre avec le tiret. Dans ce mélange des deux écritures, nombre de confusions sont possibles qu'il faut soigneusement éviter.

### Signe de la puissance.

165. La *puissance* $n^{ième}$ d'un nombre n'est autre chose que le *produit de n facteurs* égaux à ce nombre. On l'indique en écrivant $n$, en petits caractères, à la droite du nombre et un peu en haut. La puissance $n^{ième}$ de $a$ s'écrit $a^n$.

Le nombre $n$ ainsi employé, ainsi placé, se nomme l'*exposant* de la puissance. On en attribue d'ordinaire l'invention à Descartes; mais plusieurs la font remonter jusqu'à Nicolas Chuquet [1]. Quoi qu'il en soit, l'exposant simplifie et abrège beaucoup; le seul cas où il n'abrège presque point est celui où il s'agit de la seconde puissance; aussi a-t-on continué pendant longtemps à écrire [2] $aa$ pour $a^2$ : c'est ce que faisaient encore Lhopital [3] et Euler.

166. D'après le sens même du mot *multiplication*, le nombre des facteurs d'un produit ne saurait être inférieur à 2; on ne saurait donc, logiquement, parler de puissance première ni d'exposant égal à 1. Afin de généraliser la notion de puissance, on dit cependant que tout nombre a une *puissance première*, qui n'est autre que *lui-même* et qui a pour *exposant* 1; seulement on traite cet exposant 1 comme on traitait le coefficient 1 dont nous avons déjà parlé (157) : d'ordinaire on ne l'écrit pas.

167. L'exposant, quel qu'il soit, doit s'écrire en caractères *plus petits* que le nombre qu'il affecte. Il doit s'écrire à la *droite* de ce nombre et notablement *au-dessus* de la ligne principale de l'écriture. Écrit trop bas, il pourrait être pris pour un coefficient, pour un facteur. Lorsque l'exposant 3 du cube de $\sin x$ est ainsi placé trop bas, ce cube se confond avec $\sin 3x$, c'est-à-dire avec le sinus de l'arc $3x$.

---

(1) Nicolas Chuquet, 1484.

(2) *Analyse des infiniment petits*, in-8°, 1768, p. 2[illegible].

(3) Né en 1661, mort en 1704.

### Opérations inverses de la puissance.

168. Comme la *somme* et le *produit* de deux nombres dépendent *symétriquement* de ces nombres, l'*addition* et la *multiplication* n'ont l'une et l'autre qu'une *opération inverse*. Au contraire, la *puissance* $n^{ième}$ de $a$ ne dépendant *pas symétriquement* de $a$ et de $n$, l'*élévation aux puissances* nous offre *deux opérations inverses :* la recherche de la racine et la recherche de l'exposant.

Ces deux opérations répondent à ces deux problèmes : *Calculer le nombre a lorsqu'on connaît la puissance* P *et l'exposant n*; *Calculer l'exposant n, lorsqu'on connaît la puissance* P *et le nombre a*. Résoudre le premier de ces problèmes, c'est *extraire la racine* $n^{ième}$ de $a$; résoudre le second, c'est calculer, dans la base $a$, le *logarithme* de $n$.

### Signe de la racine.

169. La racine $n^{ième}$ d'un nombre quelconque est un autre nombre qui, élevé à la $n^{ième}$ puissance, reproduit le premier. La *racine* $n^{ième}$ de A s'écrit $\sqrt[n]{A}$; le nombre $n$ est l'indice; le signe $\sqrt{\phantom{A}}$ se nomme *radical*.

170. Ce signe $\sqrt{\phantom{A}}$, qui a été employé pour la première fois par Christophe Rudolf [1], peut s'expliquer d'une façon très simple. Le $\sqrt{}$ qui en constitue la première partie ne serait qu'une modification, qu'une déformation de la lettre r, initiale du mot *racine*. Le trait horizontal qui suit ne serait que l'un de ces traits si employés autrefois en guise de parenthèses; il indiquerait que l'on considère la racine de l'expression tout entière qui lui est soumise. Étymologiquement, le *radical* se composerait ainsi de *deux signes,* qu'on a peut-être eu tort de souder : un *signe d'opération* et un *signe de groupement*.

171. La plupart des anciens auteurs écrivent tantôt $\sqrt[3]{a+b}$, tantôt $\sqrt[3]{(a+b)}$. La notation $\sqrt[3]{a}+b$, sans trait ni parenthèse,

---

[1] Christophe Rudolf, 1522.

serait une faute grave; mais $\sqrt[3]{c}$ n'en serait pas une, puisque le signe $\sqrt[3]{\ }$ n'y porte que sur une seule lettre. Quant à la notation $\sqrt[3]{(a+b)}$, avec trait et parenthèse, c'est un véritable pléonasme.

Présentement, on ne supprime presque jamais le trait du radical. Il faut, en le traçant, lui donner exactement la longueur qui convient. Ce trait doit recouvrir entièrement l'expression dont on cherche la racine; il ne doit jamais la dépasser.

L'indice d'une racine quelconque est forcément un nombre positif, entier et supérieur à l'unité. Il faudrait toujours l'écrire. On le *supprime* d'ordinaire lorsqu'il est *égal à* 2. La racine carrée de 289 par exemple s'écrit $\sqrt{289}$. C'est une abréviation fautive, mais qui n'a nul inconvénient.

172. On sait qu'un nombre quelconque, réel ou imaginaire, admet toujours $n$ racines $n^{\text{ièmes}}$. L'expression $\sqrt[n]{A}$ représente l'une quelconque d'entre elles, c'est donc une expression mal déterminée. Lorsque A est réel et positif, on en restreint souvent la signification en convenant de considérer $\sqrt[n]{A}$ comme représentant le nombre réel et positif unique dont la $n^{\text{ième}}$ puissance reproduit A : c'est ce qu'on appelle la *valeur arithmétique* de $\sqrt[n]{A}$. En général, quel que soit A, pour en distinguer les $n$ racines $n^{\text{ièmes}}$, le moyen le meilleur, ou plutôt le seul, c'est de recourir à l'emploi des *quantités imaginaires* mises sous forme trigonométrique, c'est-à-dire exprimées à l'aide de ces deux variables, le *module* et l'*argument*.

## Exposants divers.

173. Comme nous l'avons dit, l'exposant d'une puissance est, par sa nature, un nombre réel, positif, entier et supérieur à l'unité. Nous avons vu qu'on lui donnait aussi la valeur 1. En généralisant davantage, on en est arrivé à considérer des exposants *nuls*, *négatifs*, *fractionnaires*, même *incommensurables*, même *imaginaires*.

174. Par convention, $a^0$ représente l'unité; $a^{-\mu}$ représente $\frac{1}{a^\mu}$;

les expressions $a^{\frac{1}{q}}$ et $a^{\frac{p}{q}}$, où $p$ et $q$ sont entiers et positifs, représentent respectivement $\sqrt[q]{a}$ et $\sqrt[q]{a^p}$; l'expression $a^s$, où $s$ est incommensurable, représente la limite de $a^{\frac{p}{q}}$ lorsque la fraction $\frac{p}{q}$ tend vers l'incommensurable $s$. L'exposant d'une puissance peut donc prendre toutes les valeurs réelles possibles. On en a étendu la définition aux valeurs imaginaires,

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

**175.** D'après ce que nous venons de dire des exposants négatifs, $a^{-\mu}$ est égal à $\frac{1}{a^\mu}$. En particulier, $a^{-1}$ est égal à $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire que la puissance d'exposant $-1$ d'un nombre quelconque n'est autre chose que l'inverse de ce nombre.

Il est évident du reste que, par l'emploi systématique des *exposants négatifs* et des *exposants fractionnaires*, on pourrait, dans le calcul algébrique, supprimer à la fois les *dénominateurs* et les *radicaux*.

### La septième opération.

**176.** Comme nous l'avons déjà dit, la *recherche de l'exposant* répond à ce problème : *Connaissant un nombre a et l'une* P *de ses puissances, calculer l'exposant n de cette puissance.*

**177.** Cette septième opération, qu'il faut forcément envisager pour être complet, manque dans la plupart des Traités d'Arithmétique. C'est J. Bourget (1) qui a, le premier, signalé cette lacune (2) et indiqué le moyen de la combler. Il donne à l'opération de la recherche de l'exposant le nom d'*exponentation*, et la représente par le signe $\frac{\cdot}{\cdot}$ qui se prononce *exponenté par*. L'égalité

$$64 \frac{\cdot}{\cdot} 4 = 3$$

doit se lire : 64 exponenté par 4 égale 3.

---

(1) Né en 1822, mort en 1887.

(2) Bourget, *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. II, p. 12.

Il n'y a rien à dire du mot *exponentation*, ni de la locution *exponenté par*. Quant au signe —÷—, il n'est autre que celui dont on se servait autrefois pour indiquer les progressions arithmétiques. Ayant déjà un sens, il n'eût point dû en recevoir un nouveau.

178. Nous l'avons déjà vu : en *exponentant* P par $a$, on obtient, dans la base $a$, le *logarithme* de P. Ce logarithme se représente d'ordinaire par la notation $\log_a P$. On y supprime souvent l'indice $a$. C'est ce qu'on fait toujours : dans les Mathématiques appliquées, lorsque le logarithme est décimal, c'est-à-dire a pour base l'entier 10; dans les Mathématiques pures, lorsque le logarithme est népérien, c'est-à-dire a pour base l'incommensurable $e$. Le logarithme népérien de P se représente soit par LP, soit par $\mathcal{L}$P, soit par log P.

Ainsi, les logarithmes ne sont que les résultats fournis par notre septième opération fondamentale. C'est ce que montre immédiatement la définition exponentielle qu'en a donnée Euler; mais ce que ne montrait point la définition fondée sur les progressions. Voilà pourquoi les anciennes Arithmétiques, même celles qui consacrent un Chapitre aux logarithmes, ne parlent aucunement de notre septième opération.

# CHAPITRE VI.

## SIGNES DE COORDINATION.

### Préambule.

179. Les signes de *coordination* se rangent presque tous dans l'une ou l'autre de ces trois espèces : signes de *groupement,* signes de *séparation,* signes de *correspondance.*

Les principaux signes de *groupement* sont le *trait horizontal,* la *parenthèse,* le *crochet.* Les principaux signes de *séparation* sont la *virgule,* le *point-et-virgule,* les *traits droits* verticaux ou horizontaux. Les principaux signes de *correspondance* sont la *ligne de points,* l'*accolade* et le *trait courbe.*

Les noms de ces trois espèces de signes en indiquent les usages respectifs; mais ces usages ne sont pas les seuls. Les signes de coordination s'emploient, en effet, dans une multitude de cas et d'une multitude de manières, toujours d'ailleurs au grand avantage de l'ordre et de la clarté.

### Signes de groupement.

180. Les signes de *groupement* proprement dits sont : le *trait horizontal* supérieur $\overline{\phantom{a}}$ ; la *parenthèse* ( ); le *crochet* [ ]. Ils servent surtout à avertir qu'une expression complexe doit être regardée comme simple, doit être traitée comme un bloc, doit toujours, dans les calculs numériques, être effectuée d'abord. Écrire

$$\overline{a+b}-c, \qquad (a+b)d, \qquad [a+b]:e,$$

c'est exprimer que le binome $a+b$ doit être successivement diminué de $c$, multiplié par $d$, divisé par $e$; mais que, dans ces diverses opérations, il doit être toujours regardé et traité comme un *tout.*

181. Lorsqu'on n'emploie qu'un seul signe de groupement, c'est le plus souvent la parenthèse. On pourrait prendre aussi le crochet. *Parenthèse* et *crochet* ont été imaginés par Albert Girard, vers 1629. Quant au *trait horizontal* supérieur (*vinculum*), il était jadis du plus grand usage; présentement on s'en sert beaucoup moins : c'est lui qui constitue la seconde partie du signe radical.

182. Les deux éléments ou traits, soit de la parenthèse, soit du crochet, doivent être placés sur la ligne principale de l'écriture, bien à la même hauteur, bien en face de l'expression qu'ils enserrent. Ils doivent présenter les mêmes dimensions, se regarder entre eux, être parfaitement symétriques l'un de l'autre par rapport à un axe vertical. Leurs formes indiquent, d'ailleurs, d'elles-mêmes la portion de la ligne principale qu'ils comprennent entre eux.

183. Le trait horizontal supérieur doit être placé bien exactement au-dessus de l'expression qu'il affecte; doit la recouvrir d'un bout à l'autre; mais sans jamais empiéter, en deçà ni au delà, sur ce qui la précède ou la suit. En particulier, il ne faut point que la barre du radical se prolonge au delà de l'expression à recouvrir.

Peut-être, à considérer toutes les sortes de confusions et d'erreurs qui se peuvent produire, ne devrait-on jamais placer le trait horizontal supérieur, même parfaitement délimité, qu'au-dessus des expressions comprises entre deux signes + ou —. Il n'y a nul inconvénient à remplacer

$$(a+b)+c \qquad \text{ou} \qquad d-(a+b)$$

respectivement par

$$\overline{a+b}+c \qquad \text{ou} \qquad d-\overline{a+b}.$$

Il semble qu'il y en aurait un sérieux à remplacer $(a+b)c$ par $\overline{a+b}c$. A la vérité, dans ce dernier exemple, il serait fort aisé d'améliorer l'écriture : il suffirait de faire précéder le multiplicateur $c$ d'un signe de multiplication.

Évidemment, on ne saurait confondre le trait horizontal supérieur de groupement, placé au-dessus d'une expression, avec le signe —, placé au-dessus de la caractéristique des logarithmes. Toutefois si, dans une même question, ces deux traits horizontaux

se rencontraient dans le voisinage l'un de l'autre; si surtout le signe de groupement était fort court; il conviendrait, sans toucher au signe moins, de remplacer le trait de groupement par une parenthèse ou un crochet.

### Signes de groupement superposés.

184. Certaines expressions compliquées exigent des signes de groupement superposés, c'est-à-dire se comprenant les uns les autres. Ce sont les *signes de groupement* des *divers ordres*.

185. S'ils consistaient tous en parenthèses, chaque parenthèse se composant de deux traits courbes, l'expression tout entière nous présenterait autant de couples de traits courbes qu'elle nous présente de parenthèses. Il faudrait que les traits courbes d'un même couple se correspondissent de la façon la plus nette; en d'autres termes, qu'à l'examen seul de l'expression on pût immédiatement, étant donné le trait qui ouvre une parenthèse quelconque, reconnaître le trait qui la ferme.

Pour faciliter cette opération, la première idée qui se présente c'est de distinguer celles des parenthèses qui en contiennent d'autres en donnant à leurs deux traits courbes des dimensions plus grandes. Mais ce mode de distinction des traits courbes manque de netteté, dès qu'il y a plus de deux parenthèses superposées. Lorsqu'il n'y en a que deux, il n'est même suffisant que si les différences des dimensions sont assez grandes. C'est un fait général, dans la théorie des signes, que deux signes de même forme, qui ne diffèrent que *par leurs dimensions,* se distinguent *assez mal* lorsqu'ils sont tant soit peu éloignés l'un de l'autre.

186. Les différences les plus *nettes,* celles que la distance affaiblit le moins, sont celles qui tiennent à la *forme* des éléments. Le meilleur sera donc de recourir à des signes de formes différentes. *Il ne faudra jamais superposer des signes de groupement possédant la même forme.*

C'est là une règle stricte. Bien que très facile à observer, elle est

constamment enfreinte. L'identité de Jacobi [1] s'écrit parfois

$$((X_k X_l) X_i) + ((X_l X_i) X_k) + ((X_i X_k) X_l) = 0.$$

Je trouve, dans des Livres récents, les égalités

$$((b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2)^2 = 2((b-c)^4 + (c-a)^4 + (a-b)^4),$$

$$(b + a(x' + x'')) x + c - a x' x'' = 0,$$

et les expressions

$$(b + (n-1)) r, \qquad F(\varphi(x), \psi(x)), \qquad G(f(x+y), f(x) . f(y)),$$

ainsi qu'une foule d'autres, tout aussi fautives.

**187.** Supposons qu'une expression exige des signes de groupement de *deux ordres :* des signes intérieurs, des signes extérieurs, ceux-ci englobant ceux-là. On pourra choisir, pour les signes intérieurs des parenthèses, pour les extérieurs des crochets; ou bien, pour les extérieurs des parenthèses et pour les intérieurs de simples traits horizontaux. On pourra écrire ainsi

$$\left[a + (b+c)^2 - (b-c)^2\right]^3,$$

ou bien

$$(a + \overline{b+c}^2 - \overline{b-c}^2)^3,$$

indifféremment.

**188.** S'il fallait des signes de groupement de *trois ordres,* on prendrait : pour les plus enfermés, les traits horizontaux; pour ceux qui les comprennent immédiatement, les parenthèses; pour ceux qui les comprennent tous, les crochets. On écrirait ainsi

$$\left[a + 3(b + \overline{c-d}^2)\right].$$

**189.** S'il fallait des signes de groupement de *quatre ordres,* on prendrait les trois premiers comme nous venons de le faire; pour les plus extérieurs, on choisirait les couples, } { , d'accolades.

---

[1] DARBOUX, *Bulletin des Sciences mathématiques,* in-8°, Paris, 1895, p. 14.

Les accolades, il est vrai, n'ont point été imaginées pour cet usage; mais elles y sont assez souvent employées, sans qu'il en résulte aucun inconvénient.

Il ne faut point, d'ailleurs, s'en servir quand on n'a que deux ou trois signes de groupement à superposer. Il est mauvais d'écrire

$$P - \{Q - (R - S)\} = P - Q + R - S.$$

190. Enfin, si l'on avait besoin de signes de groupement d'ordres encore plus nombreux, il faudrait les créer à mesure. On devrait, bien entendu, les composer chacun de deux parties de même taille, exactement symétriques, et se regardant l'une l'autre, de façon à indiquer, d'une manière très nette, l'ensemble qu'elles enserrent.

191. On le voit, les signes de groupement des divers ordres doivent différer par leurs formes. On le voit aussi, il existe entre ces signes une sorte de gradation, de *hiérarchie :* d'abord, le trait horizontal; ensuite, la parenthèse; ensuite, le crochet, les accolades, etc., etc.

### Suppression des signes de groupement.

192. Dans certains modes d'écriture, les éléments sont parfois groupés sans qu'on ait recours aux signes de groupement proprement dits, c'est-à-dire aux traits horizontaux, parenthèses ou crochets.

193. Dans un polynome entier, ordonné par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une variable $x$, les coefficients des diverses puissances de cette variable sont souvent eux-mêmes des polynomes. C'est en particulier ce qui arrive lorsqu'un polynome entier contenant plusieurs variables est ordonné par rapport à l'une d'elles. Dans tous les cas où les coefficients sont ainsi des polynomes, chacun d'eux devrait être placé sous un trait horizontal ou compris entre les deux parties soit d'une parenthèse, soit d'un crochet. On se dispense souvent de ce signe de groupement en écrivant les différents termes du coefficient les uns au-dessous des autres, en tirant une barre à la droite de la colonne ainsi formée,

et en plaçant finalement la lettre ordonnatrice à la droite de cette barre. Au lieu d'écrire

$$(a+b)x^2+(c-d)x+k,$$

on écrit

$$\begin{array}{r|r|l} a & x^2+c & x+k. \\ +b & -d & \end{array}$$

Cette manière de procéder est fort commode pour la réduction des termes semblables; elle simplifie notablement la multiplication, la division, l'extraction des racines des polynomes compliqués. L'un de ses plus grands avantages, c'est de diminuer beaucoup, de gauche à droite, la longueur des expressions où elle est employée.

194. Il se présente un fait analogue dans l'écriture des rapports. Le rapport du trinome $a+b-c$ au trinome $a+b+c$ exige deux signes de groupement lorsqu'on l'écrit

$$(a+b-c):(a+b-c).$$

Il n'en exige aucun lorsqu'on l'écrit

$$\frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

195. A la vérité, dans chacun des exemples que nous venons de donner, on pourrait dire que le signe de groupement existe. On pourrait dire : dans les polynomes, non seulement que la barre verticale en tient lieu, mais qu'elle en est un véritable; dans le rapport, que la barre de fraction joue un double rôle, celui d'un signe d'opération, celui d'un signe de groupement.

### Signes de séparation.

196. Les signes de *séparation* les plus simples sont la *virgule* et le *point-et-virgule*, que les Mathématiques empruntent à la ponctuation. La virgule est très employée; le point-et-virgule l'est beaucoup moins. Le point simple ne saurait être un signe de séparation, puisqu'il est celui de la multiplication.

197. Lorsque nous voulons écrire les uns à côté des autres, pour

en montrer le système entier, les diverses quantités qui entrent dans une même question, il nous faut séparer nettement chacune de ces quantités de la suivante. Nous effectuons cette séparation en plaçant une *virgule* dans chacun des intervalles que ces quantités laissent entre elles. Nous écrirons, par exemple, pour une suite de lettres,

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e:$$

pour une suite de nombres,

$$1,\ 4,\ 10,\ 15,\ 21.$$

Cet emploi des virgules est tout à fait pareil à celui qu'on en fait, comme nous le verrons bientôt, dans la notation des fonctions de plusieurs variables, pour bien montrer que ces variables sont des quantités distinctes, et non point les différents facteurs d'un même produit.

Au lieu de placer des virgules entre les lettres ou nombres qui se suivent, on aurait pu augmenter un peu les *vides* qui existent entre eux, et écrire simplement

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e, \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9. \end{array}$$

Mais, à moins que les vides ne soient assez grands, ce procédé, surtout lorsqu'il s'agit de nombres, nous paraît moins net que l'emploi de la virgule.

198. Ces deux modes de séparation s'appliquent d'ailleurs quelque longue que soit la suite considérée, et lors même que, devenant une série, elle ne finirait jamais. Seulement, dans ce cas d'une série, il faudrait, après avoir écrit les premiers termes, les faire suivre, sur la même ligne, de *points* analogues à nos *points suspensifs*. Pris ensemble, ces points ont la même signification que notre locution *et cætera*. On les remplace quelquefois par le signe abrégé de cette locution : c'est ce que faisait constamment Laplace.

Nous écrirons donc, sous l'une ou l'autre de ces formes,

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{array} \ldots.$$

la série appelée communément *série harmonique*. Il en serait de même pour toutes les autres séries. D'ordinaire, au lieu de séparer les termes successifs, on les réunit par des signes + ou —. Mais cette notation implique une idée de somme algébrique, qui s'ajoute à celle de suite de termes, et qui lui est jusqu'à certain point étrangère.

199. On écrivait autrefois la *progression arithmétique* en la faisant précéder du signe —$\dot{\div}$—, et la *progression géométrique* en la faisant précéder du signe —$\dot{\div}\dot{\div}$—. Entre les termes consécutifs de la première, on plaçait un *point unique;* entre ceux de la seconde, on plaçait *deux points superposés*. On écrivait, par exemple,

$$\text{—}\dot{\div}\text{—}\ 1.3.5.7.9.\ \ldots,$$

pour la suite indéfinie des nombres impairs;

$$\text{—}\dot{\div}\dot{\div}\text{—}\ 1:2:4:8:16:\ \ldots,$$

pour la suite indéfinie des puissances de 2. Ce sont là des usages surannés; des notations qui n'ont pas de raison d'être, qui sont inutiles et qu'il ne faut jamais employer.

200. S'il arrivait que la suite des quantités déjà *séparées* par des virgules dût être, à son tour, *scindée* en deux ou plusieurs tronçons, il conviendrait de placer *un point-et-virgule* à chacun des endroits où les coupures devraient s'effectuer. On pourrait remplacer, d'ailleurs, ce point-et-virgule par un trait droit, vertical, d'une faible hauteur; ou même par un double trait.

### Autres signes de séparation.

201. Les *traits droits,* horizontaux ou verticaux, simples ou doubles, sont les meilleurs *signes de séparation* lorsqu'il s'agit de séparer les unes des autres, non plus de simples lettres, mais des collections de lettres, des expressions, des relations. La résolution d'une question un peu longue comprend presque toujours plusieurs

*phases* successives. Il faudrait, sur le papier comme sur le tableau noir, que les calculs correspondant à deux consécutives d'entre elles fussent nettement *séparés* par un *trait*.

202. Bien qu'on ne puisse, à proprement parler, dire que les *vides* soient des signes de séparation, ils séparent très bien, lorsqu'ils sont un peu grands, les expressions qui les comprennent. Ce mode de séparation cependant nous semble moins net, moins précis, que celui qui se déduit de l'usage des *traits*.

203. Quoi qu'il en soit, dans une même étude, les signes de séparation doivent être souvent d'importances fort inégales. Le plus faible sera le petit intervalle vide; puis viendront la virgule, le point-et-virgule, le petit trait simple ou double; enfin le grand trait simple et le grand trait double. Il y a une sorte de *hiérarchie* pour les *signes de séparation,* comme il y en avait une (191) pour les signes de groupement.

204. Chose remarquable, les signes de groupement et les signes de séparation, qui semblent au premier abord de natures absolument opposées, remplissent assez souvent le rôle les uns des autres. Nous avons vu déjà un trait horizontal (180) parmi les signes de groupement; nous avons vu aussi, dans certains polynomes ordonnés, des traits verticaux (193) tenir lieu de parenthèses; les deux barres verticales qui enserrent les éléments d'un déterminant en forment un ensemble, un tout; il en est de même des deux barres doubles qui enserrent une matrice. Au contraire, la parenthèse, qui est le signe de groupement par excellence, sert parfois à la séparation; dans l'expression $(a+b)c$, par exemple, non seulement elle réunit $a$ et $b$, mais elle sépare $b$ de $c$ : par la suppression de la parenthèse, cette expression deviendrait $a+bc$, où l'on croirait avoir affaire au produit de $b$ par $c$.

205. En dehors du calcul, on emploie parfois aussi les signes de groupement soit pour mettre certaines expressions en relief, soit pour avertir que certaines autres doivent être prises dans un sens particulier qui n'est point leur sens ordinaire. Très souvent, par exemple, on représente la *valeur absolue* d'un nombre $a$ en écri-

vant ce nombre entre deux petits *traits verticaux,* qui constituent ensemble un véritable signe de groupement.

### Signes de correspondance.

206. Faire correspondre un objet à un objet, un objet à un groupe, un groupe à un objet ou un groupe à un groupe, voilà le rôle que doivent remplir les signes de coordination dits signes de *correspondance.*

207. Le plus simple de ces signes est la *ligne de points* qui réunit les deux groupes ou objets qui se doivent correspondre. Telle est la ligne de points qui, dans les factures, les comptes, les états de tout genre, réunit le mot désignant chaque article à la somme écrite en chiffres qui lui correspond. Telle est encore, dans la disposition donnée par Bourget [1] aux calculs logarithmiques, la ligne de points qui réunit le logarithme, écrit à gauche de la page, au Tableau, placé tout à droite, à l'extrémité de la ligne, des calculs dits *accessoires* ou *auxiliaires.*

208. Supposons qu'un objet unique doive correspondre à un groupe d'objets ou réciproquement. Le signe à employer est tout indiqué : c'est l'*accolade.* On la trace horizontalement ou verticalement; on la tourne d'un côté ou de l'autre. L'essentiel, c'est qu'on mette l'objet unique en face de sa pointe et, entre ses cornes, le groupe des objets correspondants.

L'accolade est un signe tellement bien fait, tellement bien adapté au rôle qu'on lui fait ainsi remplir, et pour lequel on l'a évidemment créée, qu'elle indique pour ainsi dire d'elle-même sa signification. De là son fréquent usage dans les comptes, pour placer, en face des différentes parties d'une colonne de nombres, les totaux qui leur correspondent. De là aussi son usage, non moins fréquent, dans les classifications de tout genre, notamment dans les Tableaux synoptiques par lesquels les discussions mathématiques un peu longues sont presque toujours résumées.

---

[1] J. Bourget, *Algèbre élémentaire,* in-8°, Paris, 1880, p. 483.

209. On connaît ce *trait courbe,* plus ou moins allongé, que les musiciens nomment *coulé* et qu'ils placent au-dessus ou au-dessous de certains groupes de notes : c'est pour eux un signe de groupement. En Mathématiques, où on l'emploie assez souvent, c'est un *signe de correspondance,* une sorte d'accolade.

Supposons, par exemple, que des quantités, étant écrites sur une ligne, on en veuille indiquer le nombre. Au-dessus d'elles, on placera ce trait courbe; et au-dessus de ce trait, en son milieu, on marquera ce nombre, de cette sorte :

$$\overbrace{a \quad b \quad c \quad \ldots \quad j \quad k \quad l}^{n}$$

Supposons encore qu'une variable $x$ croissant de $a$ à $b$ puis de $b$ à $c$, une variable différente $y$, qui dépend de $x$ et qui s'annule lorsque $x$ égale $b$, gardent le signe $+$ dans le premier de ces deux intervalles et le signe $-$ dans le second; on résumera ces faits par cette sorte de Tableau

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $a$ | | $b$ | | $c$ |
| $y$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ce trait courbe, on le voit, se place tantôt au-dessus, tantôt au-dessous du groupe ou de l'intervalle; il le comprend dans sa concavité, et il tourne sa convexité du côté de l'objet unique qu'il lui fait correspondre.

210. D'ailleurs, si l'objet et le groupe d'objets qui se correspondent étaient un peu éloignés l'un de l'autre, on tracerait une ligne ponctuée allant de l'objet unique à la pointe de l'accolade ou au milieu du trait courbe qui enserre le groupe.

Si deux groupes quelconques d'objets se correspondaient, on les mettrait chacun dans une accolade, et l'on placerait ces deux accolades dos à dos, de façon que leurs pointes fussent en face l'une de l'autre. On pourrait évidemment remplacer les accolades par des traits courbes. Dans le cas où les deux groupes seraient un peu éloignés, on joindrait encore par une ligne ponctuée les pointes des accolades ou les milieux des traits.

211. Il est à remarquer que, présentement, on remplace souvent

par de simples traits droits les traits courbes dont nous venons de parler et même les accolades. Cet emploi du trait droit n'est pas toujours heureux.

**Résumé.**

212. *Les signes de coordination* servent encore à mettre en évidence, sur le papier comme sur le tableau noir, des modes de distribution, des classifications, des partages. Peut-être pourrait-on dire qu'ils servent surtout, et dans tous les cas, à la *bonne disposition,* à la bonne ordonnance des calculs.

Si l'on tire un trait, en effet, sous les données d'un calcul, c'est pour leur faire une place à part. Si l'on partage la surface où l'on écrit en plusieurs cases ou compartiments, c'est pour séparer les unes des autres les portions ou, comme nous l'avons dit, les phases successives du calcul. Si l'on encadre les résultats, c'est pour les bien mettre en évidence, en relief.

On sait toute l'importance du rôle que jouent, dans l'écriture ordinaire, les signes de ponctuation; la division en alinéas, en chapitres, en livres. Dans l'écriture des Mathématiques, les signes de coordination jouent un rôle analogue, plus important encore. Ce n'est qu'en les employant constamment qu'on peut rendre les *calculs clairs;* qu'on peut y *introduire l'ordre,* et l'*y montrer.*

# CHAPITRE VII.

## SIGNES DE FONCTIONS.

### Notion de fonction.

213. La notion de *fonction* est difficile à définir. Certains la *définissent* d'une façon *négative* [1]. Une quantité, disent-ils, est fonction d'une autre lorsque, cette dernière ne variant pas, la première ne varie pas; une quantité est fonction de plusieurs autres lorsque, aucune de ces dernières ne variant, la première ne varie pas non plus.

Le plus souvent, on en donne une *définition positive*. On se borne alors à dire qu'une quantité variable est fonction d'une ou plusieurs autres lorsqu'elle *dépend* d'une manière quelconque de celles-ci ou de celle-là. La notion de fonction est ainsi ramenée à la notion de *dépendance,* qu'on regarde comme primitive et que, par conséquent, on ne définit pas.

Quant aux mots *constant, variable,* ils se comprennent d'eux-mêmes. Les variables évidemment sont dépendantes ou indépendantes. Les variables dépendantes ne sont autres choses que les fonctions; mais il serait désavantageux, selon nous, de remplacer le mot *fonction* par la locution *variable dépendante*.

### Fonctions explicites.

214. Les fonctions les plus simples sont celles qui nous sont données immédiatement à l'aide de la variable ou des variables dont elles dépendent, de certaines constantes appelées souvent *para-*

---

[1] H. Laurent, *Traité d'Analyse,* in-8, Paris, 1885, t. I, p. 1.

*mètres,* et de quelques signes d'opération et de groupement. Telles sont les expressions

$$(x+y)(a-x), \qquad \frac{3x-2y}{5ax}, \qquad \sqrt{ax^2+2bx+c},$$

qui dépendent des variables $x$ et $y$; telles sont, en général, toutes les expressions que nous avons appris à écrire.

Ces fonctions sont les plus simples, non point objectivement, mais subjectivement; c'est-à-dire non point en elles-mêmes, mais par rapport à nous. Étant écrites, en effet, d'une manière bien correcte, il nous suffit de les regarder attentivement pour en pénétrer la composition et pour savoir, dans chaque cas particulier, par quels procédés on en peut calculer la valeur numérique. On pourrait dire qu'elles *s'expliquent* d'elles-mêmes : de là le nom de *fonctions explicites* qu'on leur donne communément.

**215.** Elles sont, d'ailleurs, bien écrites dès que l'on a, en les écrivant, observé fidèlement les règles données plus haut touchant la forme, la grandeur et la disposition des éléments dont elles se composent. Pour faciliter l'écriture et le langage, nous pouvons, à de certains moments, les désigner par une lettre unique; dire, par exemple, que nous appelons $u$ le trinome $ax^2+bx+c$. Quelques-unes ont un nom qui leur est propre : telles sont la somme, le produit, la moyenne arithmétique, géométrique ou harmonique de deux ou plusieurs nombres. En général, les fonctions explicites ne possèdent ni noms parlés, ni symboles écrits, et il est inutile de leur en assigner.

Toutefois, sans rien sacrifier de la clarté ni de la précision, on peut représenter sous forme condensée ou abrégée celles de ces expressions qu'il serait long, difficile ou impossible d'écrire *in extenso*. Nous reviendrons plus tard (814) sur ces représentations condensées ou abrégées.

### Variantes.

**216.** Parmi les fonctions qui se présentent en Mathématiques, il en est dont les variables ne peuvent recevoir que des valeurs numériques entières. Elles se rencontrent à chaque instant. M. Méray

les a nommées des *variantes* [1], pour les distinguer des fonctions proprement dites; il a appelé les variables dont elles dépendent *indices,* parce que ces variables, dans l'écriture, se représentent d'ordinaire par les indices dont nous avons parlé (136).

217. Une variante à *un indice* se représente par une lettre affectée de cet indice, placé toujours *à droite* et *en bas*. Le terme général d'une série s'écrit ainsi $u_n$. — Une variante à *deux indices* se représente par une lettre affectée de ces *deux indices,* placés tous deux encore à droite et en bas. L'élément général d'une Table à double entrée, celui d'un déterminant, par exemple, s'écrit $a_{p,q}$. — On peut imaginer des variantes à *trois,* à *quatre,* à un nombre quelconque d'indices. Le terme général d'un *déterminant cubique* est une variante à *trois indices*. Il s'écrit $a_{p,q,r}$.

Dans le premier de ces exemples, l'indice $n$ est un numéro d'ordre; dans le deuxième, les indices $p$ et $q$ en sont encore deux, se rapportant l'un à une ligne, l'autre à une colonne; dans le troisième, les indices $p$, $q$, $r$ en sont trois se rapportant à trois directions rectangulaires entre elles. Mais il n'en est pas toujours ainsi. Le nombre, en effet, des permutations de $m$ lettres s'écrit $P_m$; le nombre des arrangements simples de $n$ lettres $p$ à $p$ s'écrit $A_{n,p}$ et, ni dans l'une ni dans l'autre de ces variantes, les indices ne sont des numéros.

218. Dans le cas de deux indices, on place très souvent l'un des deux en exposant. Comme nous l'avons fait déjà remarquer, cet usage est fautif puisqu'il peut faire naître des confusions. Il ne deviendrait tolérable que si, dans la question traitée, ces confusions étaient impossibles, ou que si l'on avertissait, par l'écriture même, que l'indice ainsi placé n'est point un exposant. Un auteur a imaginé de mettre cet indice, non point à la droite et en haut, mais au-dessus même de la lettre principale : il écrit ainsi $\overset{p}{B}_q$. Le plus souvent, sans changer la place de l'indice supérieur, on le met entre parenthèses. C'est entre parenthèses aussi qu'il convient de mettre le symbole d'une variante à un ou deux indices, avant de

---

[1] Charles Méray, *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale,* in-8°, Paris, 1872, p. 1.

l'élever à une puissance : le cube du nombre $C_{m,p}$ des combinaisons simples de $m$ objets $p$ à $p$ s'écrira donc $(C_{m,p})^3$.

219. Les différents symboles que nous venons de considérer se composent tous d'une *lettre,* majuscule ou minuscule, qui en paraît être la partie principale, mais qui n'y sert, en réalité, que de *support* aux indices. On supprime parfois cette lettre et l'on se borne à mettre l'indice ou les indices entre parenthèses ou entre crochets. On écrit ainsi, sous l'une des formes $(m, p)$, $\binom{m}{p}$, $\left[\begin{matrix} m \\ p \end{matrix}\right]$, en changeant parfois l'ordre des deux indices, la variante représentée plus haut par le symbole $C_{m,p}$. Dans un Mémoire déjà ancien [1], j'ai représenté par $(m, p)_\omega$ le nombre des combinaisons régulières, d'ordre $\omega$, de $m$ objets $p$ à $p$, nombre qui constitue évidemment une variante à trois indices. Ces derniers modes de représentation des variantes sont commodes et souvent employés.

### Fonctions indéterminées.

220. Les fonctions proprement dites sont celles où il est permis de donner à la variable *toutes les valeurs* qu'on veut. Ces fonctions peuvent être définies d'une manière quelconque : soit à l'aide des notations mathématiques, soit en langage ordinaire, soit, comme il arrive dans les sciences d'observation, d'une façon purement empirique. Elles peuvent exprimer une grandeur, un nombre, la limite d'une série, la limite du produit d'une infinité de facteurs, etc., etc. On peut aussi considérer des fonctions d'une ou plusieurs variables qu'on ne définit point et qu'on laisse absolument *indéterminées,* afin de leur donner le plus haut degré possible de généralité.

221. Ces fonctions très générales se représentent d'ordinaire par une lettre unique qu'on fait suivre, le plus souvent entre parenthèses, des lettres désignant la ou les variables. On écrit ainsi,

---

[1] *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 2e série, t. V, 1876, p. 155-198).

pour les fonctions *indéterminées* d'une variable,

$$f(x), \quad \varphi(x);$$

pour les fonctions *indéterminées* de plusieurs variables,

$$f(x, y, \ldots), \quad \varphi(x, y, \ldots).$$

Évidemment, lorsqu'il y a plus d'une variable, ces variables doivent être placées entre parenthèses; évidemment elles doivent être, comme nous l'avons dit, *séparées* les unes des autres par des *virgules*. L'absence de séparations pourrait amener des confusions fâcheuses, celle par exemple de la fonction $f(x, y, z)$ des trois variables $x$, $y$, $z$, avec la fonction $f(xyz)$ du seul produit $xyz$.

222. On marque fréquemment, non seulement la variable ou les variables, mais certaines *constantes*, certains *paramètres* dont la fonction dépend. Il est bon de *séparer* alors d'une façon nette l'ensemble des *variables* de celui des *constantes*. On y parvient en plaçant entre eux soit un point-et-virgule, soit un trait droit vertical. On écrit ainsi $G(x, y; a, b)$ dans le cas de deux variables et deux paramètres; $f(t_1, t_2, \ldots, t_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ dans celui de $n$ variables et $m$ paramètres, Les fonctions elliptiques $\wp$, $\sigma$, H s'écrivent respectivement $\wp(u; g_1, g_2)$, $\sigma(u \mid \omega, \omega')$, $H(u \mid K, iK')$, lorsqu'on y indique à la fois la variable et les deux périodes.

Il peut arriver aussi qu'on ait en même temps deux groupes de variables; on les sépare encore de même : on écrit, par exemple,

$$\psi(u_1, u_2, \ldots, u_r; x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

On n'indique parfois ni variables, ni constantes. On dit, par exemple, la fonction $f$, les fonctions $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$. Quelquefois, au contraire, sans déterminer la fonction, on en exprime certaines propriétés. Les expressions $\varphi_m(x, y)$, $f^m(x)$, $f(\overset{m}{U}, \overset{k}{z})$ représentent ainsi respectivement : une fonction homogène, du degré $m$, de $x$ et $y$; une fonction du degré $m$ de $x$; une fonction du degré $m$ par rapport à U et du degré $k$ par rapport à $z$. Il va sans dire que, dans cette dernière expression, les lettres $m$ et $k$ doivent être placées bien exactement au-dessus des lettres U et $z$.

223. Quoi qu'il en soit, on indique en général les fonctions

indéterminées par les minuscules latines $f$, $g$, $h$ ou les minuscules grecques $\varphi$, $\chi$, $\psi$; mais on peut les indiquer aussi par des lettres quelconques, majuscules ou minuscules, droites ou penchées, même rondes, même gothiques, même hébraïques ou arabes. On peut encore, pour représenter les fonctions indéterminées, se servir de la notation des variantes : c'est ce qu'on fait lorsqu'on représente une fonction de $x$ par $P_x$; et une fonction de $x$ et de $y$ par $Q_{x,y}$.

### Fonctions déterminées.

224. Les fonctions *particulières,* c'est-à-dire les fonctions bien définies, bien *déterminées* sont en nombre illimité. Les plus fréquemment employées ont reçu des noms qui leur sont propres et ont été désignées par des symboles qui correspondent à ces noms et, le plus souvent, les rappellent. Telles sont, parmi une foule d'autres, les *logarithmes,* les *lignes trigonométriques,* les *fonctions hyperboliques,* les *fonctions elliptiques.* Comme nous l'avons déjà vu, le logarithme népérien de $x$ se représente par $\log x$ ou $Lx$; le logarithme vulgaire par $\log x$; le logarithme dans la base $a$ par $L_a x$, $\log_a x$ ou même ${}^a\log x$; le cologarithme par $\operatorname{colog} x$. Il faut évidemment dans chaque cas indiquer la notation qu'on choisit, à l'instant où on la choisit; puis n'en plus changer.

225. Les six *lignes trigonométriques* de l'arc $\alpha$ se représentent ordinairement par $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, $\operatorname{séc}\alpha$, $\operatorname{coséc}\alpha$. Il est inutile d'écrire $\cos\text{-}\sin\alpha$, ou $\operatorname{cosin}\alpha$; il l'est aussi d'écrire $\operatorname{tang}\alpha$; mais les notations $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$, surtout lorsqu'elles sont manuscrites, paraissent insuffisantes.

Les *fonctions hyperboliques* s'écrivent $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, et se prononcent respectivement cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique de $x$. On sait qu'elles se déduisent de la considération de l'hyperbole équilatère à la façon dont les fonctions trigonométriques se déduisent de la considération du cercle.

Dans la théorie des *fonctions elliptiques,* se rencontrent un assez bon nombre de notations diverses : $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$; $H(u)$, $H_1(u)$, $\Theta(u)$, $\Theta_1(u)$, $Z(u)$, ...; $\sigma u$, $\zeta u$, $\wp u$, $\operatorname{Al} x$, .... Ces der-

nières sont dues à Weierstrass [1]; les précédentes H, Θ, Z, ..., où H et Z figurent des majuscules grecques, sont dues à Jacobi; quant aux fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, qu'on énonce en nommant leurs trois lettres, on ne les a pas toujours écrites ainsi : Abel [2] les représentait par $\varphi$, $f$, F et Briot par $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$. La théorie des fonctions elliptiques est encombrée de notations, ou plutôt de systèmes de notations, qui varient suivant les auteurs. Il faudrait évidemment remplacer tous ces systèmes par un système unique. On tend à ce résultat : un Ouvrage paru récemment n'expose plus que deux systèmes de notations : celui de Weierstrass et celui de Jacobi.

### Caractéristiques des fonctions.

226. Dans les symboles qui précèdent, le signe écrit à la gauche de la variable constitue ce qu'on appelle la *caractéristique* de la fonction. Log, tg, sn sont ainsi les caractéristiques respectives du logarithme, de la tangente, du sinus d'amplitude. Ces caractéristiques sont composées chacune de deux ou plusieurs lettres. Mais on en rencontre, en assez grand nombre, qui sont formées d'une lettre unique. C'est ce qui a lieu pour la fonction générale $f(x)$, dont la caractéristique est la lettre unique $f$. C'est ce qui a lieu aussi pour la fonction $\Gamma(x)$, pour la fonction $\theta(x)$, et pour les fonctions $\sigma u$, $\zeta u$, $\mathrm{p}u$.

Il existe même des notations de fonction où la caractéristique manque. Elle manque par exemple lorsqu'on se contente de mettre les variables entre parenthèses, comme on le fait lorsqu'on représente par $(m, p)$ le nombre des combinaisons simples de $m$ objets $p$ à $p$; comme on le fait lorsqu'on représente une certaine fonction par $(x, y; \xi, \eta)$. Elle manque aussi dans la notation des déterminants, lesquels sont des fonctions de leurs éléments, représentées par le Tableau de ces éléments eux-mêmes, placés entre deux barres verticales.

Par contre, certaines caractéristiques sont doubles, c'est-à-dire se composent de deux mots, de deux signes. Telles sont arc cos,

---

(1) Né en 1815, mort en 1897.
(2) Né en 1802, mort en 1829.

L ad, L s, qui se prononcent respectivement arc cosinus, logarithme d'addition, logarithme de soustraction. Il faut, entre les deux mots, laisser un vide assez petit, mais n'y placer ni virgule ni point.

227. Les caractéristiques, du moins pour la plupart, nous rappellent d'elles-mêmes leur signification. La caractéristique $f$ nous rappelle le mot *fonction;* les caractéristiques log, sin, tang nous rappellent les mots logarithme, sinus, tangente. Pour former ces caractéristiques, on s'est évidemment inspiré de ces mots. Mais il ne faut point cependant les regarder comme n'en étant que des abréviations. Elles sont, en réalité, des signes techniques spéciaux; des signes *idéographiques* où les lettres ne possèdent plus aucune signification phonétique, où elles ne sont plus, pour parler encore notre langage, que des éléments *non significatifs.*

Ainsi les caractéristiques des fonctions sont des signes simples, d'une nature particulière. Pour en bien montrer la nature particulière, il serait bon de n'y employer que des lettres empruntées à un alphabet particulier ou à une variété particulière d'alphabet : par exemple des lettres gothiques ou des majuscules rondes. Pour en bien montrer la simplicité, il serait bon aussi, lorsque la caractéristique se compose de plusieurs lettres, de lier toutes ces lettres ensemble, d'en former un véritable *monogramme,* analogue aux ligatures de la langue grecque, aux lettres doubles de l'alphabet allemand ou au signe abrégé de notre locution *et cætera.* Il faudrait en outre que la forme de ce monogramme nous en rappelât encore la signification.

Il ne faut *jamais lier entre elles les lettres qui constituent les facteurs d'un produit;* il faut *toujours lier celles qui composent une caractéristique.* C'est une première manière de distinguer les lettres qui représentent des nombres de celles qui n'en représentent pas. Une seconde consiste à écrire les premières en italique et les secondes en caractères droits. Dans les expressions données en certains Livres pour les fonctions $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$, les caractéristiques sn, cn, dn sont droites; la variable $u$ est penchée.

La première lettre d'une caractéristique peut être à volonté majuscule ou minuscule. Mais il ne faut point qu'elle s'écrive tantôt d'une façon, tantôt d'une autre. Il est mauvais que certains auteurs écrivent $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, ..., et certains autres $\mathrm{Sin}\,x$, $\mathrm{Cos}\,x$, $\mathrm{Tg}\,x$, ....

228. Quoi qu'il en soit, dans la notation des fonctions, c'est toujours après la caractéristique, quand elle existe, que se place la variable ou le groupe des variables. Il faut que la caractéristique en soit très rapprochée; mais il ne faut *jamais,* puisqu'elle n'est pas une abréviation, *qu'elle soit suivie d'un point.* On doit écrire $\log x$, $\sin x$, et non pas, malgré beaucoup d'exemples, $\log.x$, $\sin.x$.

Ici se pose d'elle-même une question importante. Dans la représentation d'une fonction d'une variable unique, faut-il mettre cette variable entre parenthèses? On écrit $f(x)$ et l'on écrit $\sin x$ : voilà deux usages contradictoires. Suivant nous, il conviendrait de toujours supprimer la parenthèse, et d'écrire $fx$ comme on écrit $\sigma u$, $\zeta u$, $pu$. Il n'en résulterait aucun inconvénient si la caractéristique possédait une forme telle qu'on ne pût jamais la prendre pour un facteur, qu'on ne pût jamais confondre une expression telle que $fx$ avec le produit de $f$ par $x$. Cette confusion serait impossible si l'on écrivait la caractéristique comme nous avons conseillé de le faire; ou si l'on marquait d'un point, d'un trait, d'un diacritique spécial quelconque, la lettre ou le monogramme qui la représente.

Mais il est bien certain que la parenthèse devient indispensable, lorsque la caractéristique est suivie de deux ou plusieurs lettres. On écrira donc $f(x, y, z)$, $\varphi(x+y, xy)$, $\sin(a+b+c)$, ....

229. On appelle *fonction de fonction,* dans le cas le plus simple, une fonction d'une autre fonction. Si $u$ est une fonction de $x$, l'expression $f(u)$ désigne une fonction de fonction. Pour prendre des exemples particuliers, $\log(\sin x)$, $\tang(e^x)$, ... sont des fonctions de fonction. Il peut arriver que l'expression renferme plusieurs fois la même caractéristique. C'est ce qui a lieu pour $f[f(x)]$, pour $\log(\log x)$, etc., etc. Dans toutes ces expressions, on peut, sans inconvénient, supprimer les parenthèses et écrire $\log\sin x$, $\tang e^x$, $ffx$, $\log\log x$. Il faut, d'ailleurs, que les deux caractéristiques qui se suivent soient, non pas liées, mais très rapprochées.

### Nombre dépendant d'un autre.

230. Dès le commencement de l'Arithmétique, on rencontre des nombres, constants ou variables, qui dépendent d'un ou plusieurs

autres. On peut citer comme tels la partie entière d'un nombre, sa valeur absolue, son module, ses multiples; comme tels aussi le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.

231. La *partie entière* d'un nombre, c'est le plus grand entier contenu dans ce nombre. Les parties entières de $x$, de $\frac{a}{b}$, de $\sqrt{a}$ se représentent respectivement par $E(x)$, $E\left(\frac{a}{b}\right)$, $E(\sqrt{a})$. On supprime parfois dans ces notations soit la parenthèse, soit la caractéristique. On écrit, dans le premier cas, $Ex$, $E\frac{a}{b}$, $E\sqrt{a}$; dans le second $(x)$, $\left(\frac{a}{b}\right)$, $(\sqrt{a})$.

La *valeur absolue* d'un nombre réel n'est autre chose que ce nombre lui-même, pris avec le signe $+$. Pour la représenter, on met le nombre entre deux traits verticaux, ou l'on place, au-dessus de lui, un trait horizontal. On écrit ainsi $|z|$ ou $\bar{z}$. On opérerait de même pour indiquer la valeur absolue d'une expression, celle par exemple de $a - b$. Il nous semble inutile, ou plutôt très mauvais, d'avoir créé un signe nouveau pour cette valeur absolue.

Le *module* du nombre $a + bi$, c'est le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$ pris avec le signe $+$. Il se confond avec la valeur absolue lorsque $b$ est nul, c'est-à-dire lorsque le nombre est réel. Il s'indique comme elle : le module de $z$ s'indiquera donc par $|z|$ ou $\bar{z}$. Lorsque l'imaginaire $u$ se présente sous la forme $\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ son module est $\rho$. Quant à l'angle $\omega$, c'est l'*argument* de $u$ : on le désigne par $\arg u$. Il faut d'ailleurs se garder avec soin des notations un peu compliquées; et ne pas écrire par exemple $\text{p.r.}\,u$ pour indiquer la partie réelle de l'imaginaire $u$.

232. On appelle *multiples* d'un nombre les produits qu'on obtient en multipliant successivement ce nombre par les entiers consécutifs 1, 2, 3, .... Tout nombre possède une infinité de multiples. Un multiple quelconque de $a$ s'écrit à volonté mult. de $a$, $m^e$ de $a$ ou $m^e a$, $\mathrm{M}a$ ou $\mathfrak{M}a$. Le mieux serait de le représenter par le produit $m.a$ ou $ma$, dans lequel le facteur $m$ serait un entier indéter-

miné. Lacroix a représenté un multiple de $p$ par E$p$, où E est un entier : cette notation a le tort de rappeler *partie entière* de $p$.

Les locutions *plus grand commun diviseur* et *plus petit commun multiple* sont l'une et l'autre assez longues. Beaucoup d'auteurs les remplacent par les abréviations *pgcd* et *ppcm*. Certains représentent le plus grand commun diviseur par la majuscule $\Delta$ et le plus petit commun multiple par la minuscule $\mu$. Ces notations sont excellentes, les lettres $\Delta$ et $\mu$ rappelant, par leurs significations phonétiques, les mots *diviseur* et *multiple;* par leurs tailles, les locutions *plus grand* et *plus petit*.

### Fonction dépendant d'une autre.

233. Il existe des *fonctions* qui ne sont pas, à proprement parler, des fonctions d'une autre fonction, mais qui ne sont définies que par rapport à cette autre fonction. Telles sont la différence, la différentielle, la dérivée, l'intégrale, le résidu d'une fonction donnée.

234. Soient les nombres $u_1, u_2, u_3, \ldots$; leurs *différences premières* se représentent par $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3, \ldots$; leurs *différences deuxièmes,* par $\Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \Delta^2 u_3, \ldots$; leurs *différences troisièmes,* par $\Delta^3 u_1, \Delta^3 u_2, \Delta^3 u_3, \ldots$; et ainsi de suite. Les différences successives de la fonction $v$ de $x$ s'écrivent $\Delta v, \Delta^2 v, \Delta^3 v, \ldots$; si la fonction était donnée sous la forme $f(x)$, ces différences s'écriraient $\Delta f(x), \Delta^2 f(x), \Delta^3 f(x), \ldots$. Dans tous ces exemples, les caractéristiques sont les lettres $\Delta$, affectées ou non d'un indice supérieur.

Les *différentielles successives* de la fonction $z$ de $x$ s'écrivent $dz, d^2 z, d^3 z, \ldots$. Leurs caractéristiques sont $d, d^2, d^3, \ldots$. La notation des différentielles est tout à fait analogue à celle des différences.

235. La *dérivée* de la fonction $u$ de $x$ se représente, presque indifféremment, par

$$u', \quad \frac{du}{dx}, \quad \mathrm{D}u.$$

La dérivée de $f(x)$, par

$$f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \mathrm{D}f(x).$$

Dans les premières de ces notations, la dérivée s'indique par un accent; dans les deuxièmes, elle s'écrit à la façon d'un quotient, mais l'on pourrait presque dire que sa *caractéristique* est $\frac{d}{dx}$; dans les troisièmes, cette *caractéristique* n'est pas douteuse, c'est la majuscule D.

Les dérivées successives s'indiquent d'ordinaire par des accents. Pour la fonction $f(x)$, les quatre premières dérivées s'écrivent $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{\text{IV}}(x)$. On continue, à l'aide des indices supérieurs, écrits d'abord en chiffres romains, ensuite en chiffres arabes mis entre parenthèses. D'une manière générale, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ s'écrit à volonté sous l'une ou l'autre de ces formes

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad \mathrm{D}^n f(x).$$

Les *fluxions* de Newton sont des vitesses et non point des accroissements. Les premières fluxions de $x$, $y$, $z$ se représentaient par $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$; les secondes, par $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$; et ainsi de suite. Ce que nous appelons la dérivée de $y$ par rapport à $x$ s'écrirait $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Cette notation est analogue à $\frac{dy}{dx}$; mais, quoi qu'on en ait dit, $\dot{y}$ et $\dot{x}$ n'y sont point des différentielles. Au reste, le mot et le signe de fluxion sont aujourd'hui complètement inusités.

**236.** La définition initiale de la dérivée suppose que la fonction ne dépende que d'une variable. Lorsqu'elle dépend de plusieurs, on imagine que chacune de celles-ci varie à son tour, mais est alors seule à varier. De là les *dérivées partielles*, puis les *dérivées partielles* de ces *dérivées partielles*, et ainsi de suite, c'est-à-dire les dérivées partielles de tous les ordres. La fonction $f(x, y, z)$ des trois variables $x$, $y$, $z$ possède les trois dérivées partielles du premier ordre $f'_x$, $f'_y$, $f'_z$; les six dérivées partielles du deuxième ordre $f''_{x^2}$, $f''_{y^2}$, $f''_{z^2}$, $f''_{yz}$, $f''_{zx}$, $f''_{xy}$; etc., etc. D'une manière générale, la dérivée d'ordre $n$, prise $\alpha$ fois par rapport à $x$, puis $\beta$ fois par rapport à $y$, puis $\gamma$ fois par rapport à $z$, s'écrit indifféremment

$$f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}, \quad \mathrm{D}^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma},$$

l'entier $n$ étant toujours la somme des trois entiers $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Une chose à remarquer dans la notation des dérivées, c'est cette forme de quotient qu'on leur donne dans la plupart des Ouvrages. Cette forme s'explique. La dérivée, en effet, peut toujours être regardée comme un véritable quotient et il y a avantage à le rappeler. Mais, dans les calculs, les dérivées des fonctions d'une seule variable peuvent seules être *traitées* comme telles. Dans la *dérivée* $\frac{du}{dx}$ de la fonction $u$ de la *seule variable* $x$, le numérateur et le dénominateur peuvent être séparés, éloignés l'un de l'autre, écrits et employés isolément. Dans la dérivée $\frac{\partial v}{\partial x}$ de la fonction $v$ des trois *variables* $x$, $y$, $z$, il n'en est plus de même; l'expression $\frac{\partial v}{\partial x}$ doit être regardée comme un bloc insécable : on ne peut la traiter comme un quotient; on n'en peut séparer les deux termes. Si on les séparait, en effet, dans un calcul où entreraient à la fois $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, on obtiendrait, sous la même forme $\partial v$, trois quantités de définitions diverses et, en général, de valeurs différentes. C'est pour rappeler cette insécabilité qu'il est nécessaire d'écrire les dérivées partielles un peu autrement qu'on n'écrit les dérivées ordinaires. De là l'emploi, d'ailleurs récent, des *deux lettres différentes* $d$ et $\partial$. Cet emploi prévient une foule de confusions et d'erreurs; par malheur, comme on l'a fait remarquer, il est impuissant à les prévenir toutes.

**237.** Bien que la *fonction primitive* de $f(x)$ n'ait point la même définition que l'*intégrale indéfinie* de $f(x)dx$, elle coïncide avec elle. Cette fonction primitive se désigne souvent par $\mathrm{P}f(x)$; cette intégrale définie, par $\int f(x)dx$. Fonction primitive et intégrale possèdent, d'ailleurs, chacune, une infinité de déterminations qui ne diffèrent entre elles que par une constante, appelée *constante arbitraire*. L'expression plus particulière $\int_a^x f(x)dx$ représente l'intégrale après qu'on a choisi la constante de telle sorte que cette intégrale s'annule pour la valeur $a$ de $x$.

Quant à l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$, c'est, non plus une fonc-

tion de $x$, mais une fonction des limites $a$ et $b$. Le signe $\int_a^b$ rappelle le signe $\sum_a^b$ que nous considérerons plus tard; il le rappelle même d'autant mieux qu'il se prononce *somme de a à b*. Il est bon qu'il en soit ainsi, puisque l'intégrale définie, par sa nature même, n'est autre chose que la limite d'une somme représentable par $\sum_a^b$, lorsque les termes de cette somme sont infiniment petits et infiniment nombreux.

Dans les intégrales multiples, dans $\int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, par exemple, les signes $\int$ peuvent présenter des limites ou en être dépourvus. Ces intégrales multiples peuvent donc être regardées tantôt comme définies, tantôt comme indéfinies. Ce sont : dans le premier cas, des limites de $\sum$ superposés; dans le second, des intégrales simples également superposées.

238. On connaît la notion de *résidu*, imaginée par Cauchy, et si importante dans le calcul intégral. Le résidu n'est au fond qu'une intégrale définie. Cauchy le désigne, à peu près indifféremment, par l'une ou l'autre des notations (¹)

$$\mathfrak{S}_c((f(z))), \quad \mathfrak{S}_c[f(z)], \quad \mathfrak{S}_c f(z), \quad \mathfrak{S} f(z),$$

dont la dernière, qui est la plus simple, suffit dans la plupart des cas. Le *résidu intégral*, qui est une somme de résidus ordinaires, se représente par $\mathfrak{S}_s f(z)$. Il convient d'ailleurs de rapprocher le symbole $\mathfrak{S}$ du nom d'*excès* qu'on a parfois donné au résidu.

### Valeurs particulières des fonctions.

239. Les symboles si variés que nous venons d'indiquer pour la représentation des fonctions sont presque tous ce que, dans notre

(¹) H. Laurent, *Traité d'Analyse*, in-8, Paris, t. III, p. 243.

théorie générale, nous appelons des *signes doubles, triples, quadruples,* .... Ils permettent, en général, d'écrire, de la façon la plus expressive, la valeur que prend une fonction pour des valeurs déterminées des variables.

**240.** Les valeurs que prend $f(x)$, pour les valeurs $a$ et $b$ de $x$, se représentent respectivement par $f(a)$ et $f(b)$. La valeur de $\varphi(x, y, z)$ pour les valeurs $a$, $b$, $c$ de $x$, $y$, $z$ se représente par $\varphi(a, b, c)$. Lorsque $x$ est égal à $a$, la fonction $P_x$ devient $P_a$; lorsque $x$, $y$, $z$ sont égaux à $a$, $b$, $c$, la fonction $Q_{x,y,z}$ devient $Q_{a,b,c}$. Les dérivées successives de $f(x)$, quand $x$ égale $a$, s'écrivent $f'(a), f''(a), f'''(a)$, etc.

Dans tous ces exemples, il nous a suffi de remplacer les lettres $x, y, z$ qui désignaient les variables par les lettres $a$, $b$, $c$ qui en désignaient les valeurs numériques respectives. Mais, quand les variables ne sont point en évidence, ce procédé ne se peut appliquer. De là, dans le cas particulier de la dérivée de $f(x)$, une supériorité de la notation $f'(x)$, qui est due à Lagrange, sur la notation $\frac{df}{dx}$, qui est due à Leibniz.

**241.** Supposons qu'une fonction de $x$ soit représentée simplement par $y$. Les valeurs de cette fonction et de ses dérivées, pour la valeur $a$ de $x$, s'écriront $y_a$, $y'_a$, $y''_a$, .... Si les dérivées étaient représentées par $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., leurs valeurs particulières, pour la valeur $a$ de $x$, s'écriraient $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a$, ....

La dérivée partielle du second ordre de la fonction $u$ des trois variables $x$, $y$, $z$, prise d'abord par rapport à $x$, ensuite par rapport à $y$, se représente par $\frac{d^2u}{dx\,dy}$. La valeur particulière qu'elle prend lorsqu'on y remplace $x$, $y$, $z$ respectivement par $a$, $b$, $c$ se représente par $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)_{a,b,c}$; et il en est de même pour toutes les dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables.

**242.** Certaines fonctions de $x$, lorsqu'on y remplace $x$ par $a$, prennent une *forme indéterminée;* mais possèdent alors ce qu'on appelle une *vraie valeur*. Cette vraie valeur n'est que la limite vers

laquelle tend la fonction lorsque $x$ tend vers $a$. On l'écrit

$$\lim\left[f(x)\right]_a \quad \text{ou} \quad \lim_a f(x).$$

C'est d'ailleurs par cette notation que s'indique une *limite* quelconque.

243. Ainsi, dans ces divers cas, pour marquer la valeur particulière de la fonction, nous nous bornons à placer en *indices* les valeurs particulières que nous attribuons aux variables. Quelques auteurs placent en indices, non point ces simples valeurs, mais les *égalités* qui leur correspondent. Au lieu d'écrire

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_{a,b,c}, \quad \lim\left[f(x)\right]_a,$$

ils écrivent

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b\\z=c}}, \quad \lim\left[f(x)\right]_{x=a}.$$

Ce sont là des *notations compliquées,* qu'un peu de soin dans la rédaction suffirait à rendre superflues.

Quant à la notation

$$\mathrm{p}(u,\ \omega'=\infty) \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{p}(u,\ \omega')_{\omega'=\infty},$$

quoique je la trouve dans un Livre excellent, elle est franchement *détestable.*

### Fonctions inverses.

244. Lorsque deux variables sont *liées entre elles* d'une manière quelconque, chacune d'elles est fonction de l'autre et les deux fonctions ainsi définies sont *inverses l'une de l'autre*. Considérons un arc et son sinus; chacune de ces longueurs est fonction de l'autre : ce sont, comme nous venons de le dire, deux fonctions inverses. Si l'on prend l'arc pour variable proprement dite et qu'on le désigne par $x$, son sinus se représente par $\sin x$. Si l'on prend le sinus pour variable et qu'on le désigne par $x$, l'arc se représente par $\operatorname{arc\,sin} x$. Ces deux fonctions $\sin x$ et $\operatorname{arc\,sin} x$ sont inverses l'une de l'autre.

245. La caractéristique arc sin est un symbole trop long et assez

mal fait. D'après ce que nous avons dit, il la faudrait remplacer, ainsi que la caractéristique sin, par un simple monogramme. Il faudrait même que ces deux monogrammes eussent des formes telles qu'on s'aperçût immédiatement qu'ils représentent des fonctions inverses. D'une manière générale, il serait bon qu'on eût un moyen, étant donnée la caractéristique d'une fonction quelconque, d'en déduire immédiatement celle de la fonction inverse.

---

# CHAPITRE VIII.

## SIGNES DE RELATIONS.

### Diverses sortes.

246. Les *signes de relations* sont de deux sortes : les *signes d'égalité*, les *signes d'inégalité*.

Le *signe d'égalité* proprement dit est le signe $=$. On en peut rapprocher le signe d'*identité*, $\equiv$ ou $\equiv$; le signe de *congruence*, $\equiv$; le signe d'*équipollence*, $\triangleq$; le signe d'*équivalence*, $\sim$.

Les *signes d'inégalité* proprement dits sont les signes $>$ et $<$. On en peut rapprocher les signes *négatifs*

$$\neq \quad \not> \quad \not<$$

et les signes *doubles*

$$\gtrless \quad \leqq \quad \geqq,$$

qui leur correspondent chacun à chacun.

### Signe $=$.

247. Le *signe* $=$, qui se prononce *égal à*, se place entre les deux expressions dont il indique l'égalité. Ces expressions constituent les deux *membres* de la relation : à gauche, le premier; à droite, le second.

Le signe égal doit être parfaitement horizontal, et placé bien exactement sur la ligne principale de l'écriture. Il doit avoir une longueur assez grande. Les deux traits dont il est formé doivent être égaux et bien parallèles. La distance qui les sépare doit être

modérée : trop grande, comme dans quelques écritures manuscrites, le signe = ne paraîtrait plus un signe simple; trop petite, comme dans certains Mémoires imprimés, il ressemblerait au signe —.

248. Le signe = tel que nous le formons est attribué à l'Anglais Recorde [1]. Il ne se trouve point dans les Ouvrages de Descartes, lequel employait constamment, dans l'écriture de ses équations, une sorte de lettre $\alpha$ ou de chiffre 8 non fermé et couché, $\infty$.

Quelle est l'origine de chacun de ces signes? Le signe = actuel a-t-il été choisi parce qu'il est composé de deux traits parfaitement égaux? La lettre $\alpha$ de Descartes l'a-t-elle été, comme je l'ai ouï dire, parce qu'elle nous rappelle l'initiale *æ* du verbe latin *æquare?* Ces conjectures sont fort vraisemblables. J'en hasarderai cependant une autre, qui possède cet avantage de convenir aux deux cas.

Les signes astronomiques remontent à la plus haute antiquité : ils sont de bien des siècles antérieurs aux signes de l'Algèbre. D'un autre côté, les époques des *équinoxes* sont celles où les jours et les nuits sont *égaux* sur toute la surface de la Terre. Les deux signes que nous étudions ne seraient-ils point de simples modifications ou déformations des *signes astronomiques* des *équinoxes*? Il est certain que notre *signe égal* est presque identique au signe de la *balance;* et que, pour obtenir le signe employé par Descartes, il suffirait de coucher le signe du *bélier*.

249. Comme autre forme du signe égal, on pourrait peut-être citer le système de quatre points :: figurant les quatre sommets d'un carré. Ce système s'est perpétué jusqu'à nous; mais n'a jamais, ce me semble, été employé que dans l'*ancien algorithme* des *proportions,* où il se prononçait *comme*. La relation

$$a : b :: c : d$$

se lisait *a est à b comme c est à d*.

Présentement, dans les égalités proprement dites, on ne se sert, on ne doit se servir, que du seul signe =.

---

[1] Vers 1557.

### Signe d'identité.

250. Les *égalités* sont de trois sortes. D'abord, les égalités telles que

$$7 + 2 = 9,$$

où ne figure aucune lettre, où tous les nombres sont écrits en chiffres : ce sont les égalités purement *numériques*. Ensuite, les égalités telles que

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2,$$

qui contiennent plusieurs lettres et qui sont vérifiées quelques valeurs qu'on attribue à ces lettres : ce sont les *identités*. Enfin, les égalités telles que

$$x^3 + 11x = 6x^2 + 6,$$

qui contiennent une ou plusieurs lettres, mais qui ne sont vérifiées que lorsqu'on substitue à ces lettres certaines valeurs numériques particulières : ce sont les *équations*.

251. Les *identités*, définies comme nous venons de le faire, ont paru à quelques auteurs, en raison de leur caractère propre et de leur importance, devoir s'écrire à l'aide d'un signe spécial, qu'ils nomment précisément *signe d'identité*. Celui qu'ils emploient le plus fréquemment est le signe $\equiv$, qui est tiré de la théorie des nombres, pour laquelle il a été créé, et où il constitue le signe de *congruence*. L'usage qu'ils en font pour indiquer l'identité est, par conséquent, incorrect, fautif. Il faudrait, pour cette indication, un *signe particulier*, qu'on n'employât que pour elle. On se sert parfois du signe $\equiv$, qui ressemble trop au signe de congruence. Mon prédécesseur, M. Vazeille, se servait du signe $\Xi$, qu'il avait peut-être inventé, et qui ne présenterait que des *avantages*.

252. Égalités purement numériques, identités, équations, toutes ces relations, d'ailleurs, peuvent s'écrire à l'aide du seul signe $=$. On les a, jusqu'à ces derniers temps, écrites les unes et les autres à l'aide de ce signe unique. De bons esprits pensent que cette pratique était bonne et méritait d'être conservée. Il est certain que le

signe d'identité n'est point indispensable; qu'il ne faut point s'en servir à tout propos; qu'il ne faut point surtout imiter ceux qui donnent aux égalités purement numériques le nom d'*identités*, et qui emploient pour les écrire l'un des signes spéciaux que nous venons d'indiquer.

### Signe de congruence.

**253.** La notion et le signe de *congruence* sont dus à Gauss, qui les a définis à la première page de ses *Disquisitiones arithmeticæ* (¹). La *congruence*

$$a \equiv b \pmod{p},$$

où $a$, $b$ et $p$ sont des entiers positifs ou négatifs, se prononce *a congru à b* suivant le *module p*. Elle signifie que la différence $a - b$ est exactement divisible par $p$.

Le module se place, entre parenthèses, en face, mais non pas à l'intérieur du second membre de la congruence. On ne se dispense de l'écrire que quand le texte en indique nettement la valeur.

**254.** La congruence n'est pas une égalité véritable. Il faudrait, pour en rendre les deux membres égaux, ajouter à l'un ou à l'autre un multiple de $p$. Quant au signe $\equiv$, il rappelle tout à fait le signe $=$ dont il ne diffère que par l'adjonction d'une troisième barre. Nous avons dit qu'on l'employait fréquemment comme signe d'identité et que cet emploi était incorrect. Par contre, on le remplace quelquefois, dans l'écriture des congruences, par le signe $\equiv$ dont nous avons déjà parlé : c'est une nouvelle incorrection.

**255.** La notion de *congruence*, telle que Gauss l'a définie, ne se rapporte qu'aux *nombres entiers*. On l'a, depuis, étendue à l'Algèbre. Deux polynomes entiers, $f(x)$ et $g(x)$, sont congrus par rapport à un troisième $\psi(x)$, qui est alors le module, lorsque leur différence est exactement divisible par ce troisième polynome. C'est en ce sens qu'il faut comprendre cette proposition : *une égalité entre deux imaginaires n'est qu'une congruence dont le module est* $i^2 + 1$.

---

(¹) Traduction française de Poullet-Delisle, Paris, 1807.

### Signes d'équipollence et d'équivalence.

256. L'*équipollence* est une égalité véritable; mais une égalité *géométrique,* une égalité dont chaque membre représente soit un vecteur, soit une ligne brisée composée de plusieurs vecteurs. Elle s'indique à l'aide du signe $\bumpeq$ qui se prononce *équipollent à,* et qui n'est autre chose que le signe astronomique de la *balance,* c'est-à-dire de l'équinoxe d'automne.

257. La *théorie des équipollences* constitue, on le sait, une sorte de *géométrie analytique plane* (1), qui a été inventée, il y a déjà longtemps, par G. Bellavitis. On en peut rapprocher la *théorie des quaternions,* qui se rapporte à l'espace et qui est due à Hamilton. Ces théories renferment l'une et l'autre, en dehors du signe $\bumpeq$, plusieurs signes qui leur sont propres. Les limites que nous nous sommes imposées ne nous permettent point d'en parler.

258. Quant au signe d'*équivalence,* $\sim$, si employé par Kronecker (2) et son école, il appartient, non point à la Géométrie, mais à la théorie des *formes* et à celle des *nombres algébriques.* Placé entre les expressions de deux systèmes, il exprime que ces systèmes sont *équivalents.* Les relations où il figure sont, d'ailleurs, les unes, d'ordre arithmétique; les autres, d'ordre analytique.

### Signes d'inégalité proprement dits.

259. Les signes d'*inégalité* proprement dits sont le signe $>$, qui se prononce *plus grand que* ou *supérieur à;* et le signe $<$, qui se prononce *plus petit que, moindre que* ou *inférieur à.* Ces signes remontent au XVIe siècle et paraissent dus à Harriot. Les deux expressions entre lesquelles on place l'un ou l'autre sont les deux *membres* de l'inégalité.

---

(1) Giusto Bellavitis, *Equipollenze.* in-4°. Modena, 1854.
(2) Bellavitis, 1803-1880; Hamilton, 1805-1865; Kronecker, 1823-1891.

260. Les *inégalités* pourraient, comme les égalités, se partager en *trois sortes :* celles où ne figure aucune lettre et où, par conséquent, tous les nombres sont écrits en chiffres; celles qui contiennent plusieurs lettres et qui sont vérifiées, quelques valeurs qu'on attribue à ces lettres; celles qui contiennent une ou plusieurs lettres, mais qui ne sont vérifiées que pour des valeurs comprises en de certains intervalles. Les inégalités de la première sont évidemment des inégalités purement *numériques;* celles de la deuxième correspondent aux *identités,* mais n'ont pas reçu de noms; celles de la troisième ont reçu, en quelques Ouvrages, celui d'*inéquations.* Mais, pour aucune de ces trois sortes, on n'a imaginé de signes particuliers.

261. Il est à remarquer que les inégalités

$$a > b, \qquad c < d$$

reviennent respectivement aux propositions : $a - b$ est *positif,* $c - d$ est *négatif.*

Il est à remarquer aussi que l'usage ordinaire des signes $>$, $<$ est restreint aux seules *quantités réelles,* qu'il ne s'étend point aux *quantités imaginaires.* On définit, en effet, l'imaginaire nulle, mais on ne dit point ce qu'il faut entendre ni par imaginaire positive, ni par imaginaire négative.

### Signes négatifs de relation.

262. Il existe des signes *négatifs de relation.* On les forme en prenant les signes d'égalité ou d'inégalité et *barrant* chacun d'eux d'un trait oblique, droit ou courbe. Ce sont les trois signes

$$\neq \qquad \not< \qquad \not>.$$

La relation $a \neq b$ s'énonce *a non égal à b,* ou plutôt *a différent de b.*

La relation $a \not> b$ s'énonce *a non plus grand que b,* ou *a non supérieur à b.*

La relation $a \not< b$ s'énonce *a non plus petit que b,* ou *a non inférieur à b.*

263. Ces signes *négatifs* de relation sont assez récents. Les deux derniers sont rarement employés; mais le premier l'est fréquemment. Tous les trois, selon nous, sont des signes assez mal faits. Ils présentent cet inconvénient grave de se confondre avec les signes positifs correspondants dès que le trait, qui seul les en distingue, cesse d'être très fort, très marqué.

### Signes doubles de relation.

264. Lorsque l'on compare l'une à l'autre deux quantités réelles $a$ et $b$, il ne se peut présenter que les trois cas suivants :

$$a = b, \qquad a > b, \qquad a < b.$$

Écrire, comme on vient de le faire à l'aide des signes négatifs de relation, qu'on ne se trouve point dans l'un de ces trois cas, c'est écrire évidemment qu'on se trouve dans l'un des deux autres. Telle est l'origine des *signes doubles* de relation, lesquels sont aussi au nombre de trois, et correspondent chacun à chacun aux trois signes négatifs. Ces trois signes doubles sont

$$\gtrless, \qquad \neq, \qquad \geqq.$$

265. Pour exprimer que *a n'est pas égal à b,* on exprime qu'il est *plus grand* ou *plus petit,* en écrivant la relation

$$a \gtrless b,$$

laquelle s'énonce soit *a plus grand ou plus petit que b*, soit *a supérieur ou inférieur à b.*

Pour exprimer que *a n'est pas plus grand que b*, on exprime qu'il lui est *inférieur* ou *égal,* en écrivant la relation

$$a \leqq b,$$

laquelle s'énonce *a inférieur ou égal à b.* Il est incorrect de dire *a plus petit ou égal à b*, puisque *plus petit* veut être suivi de la conjonction *que.* Il l'est aussi, et pour la même raison, de dire *a moindre ou égal à b*, comme le répète constamment Laplace. Une tournure très correcte et très française, qui aurait seulement le

tort de ne point rappeler la complexité du signe double, ce serait de dire, comme on le fait dans le langage ordinaire, *a au plus égal à b*.

Pour exprimer que *a n'est pas plus petit que b*, on exprime qu'il lui est *supérieur ou égal,* en écrivant la relation

$$a \geqq b,$$

qui s'énonce *a supérieur ou égal à b*; qu'il serait incorrect d'énoncer *a plus grand ou égal à b*; mais qu'on pourrait résumer par cette tournure : *a au moins égal à b*.

**266.** Les deux signes doubles, $\leqq$, $\geqq$ se composent chacun de deux signes simples, placés sur une même verticale, assez près l'un de l'autre. Au lieu de les écrire ainsi, on les écrit souvent, surtout dans les manuscrits, de la manière suivante $\leq$, $\geq$. Ces formes nouvelles diffèrent très peu des précédentes; elles sont seulement un peu plus brèves; on peut se servir indifféremment des unes ou des autres.

**267.** Les signes *doubles* sont, ce nous semble, bien préférables aux signes *négatifs* de relation qui leur correspondent. Ils ne peuvent jamais se confondre avec d'autres signes; ils nous permettent d'écrire des propositions affirmatives; ils expriment, d'une façon plus analytique, dans la suite indéfinie des quantités croissantes, les positions relatives des deux quantités comparées.

**268.** Lorsque ces deux quantités sont prises au hasard, il y a l'infini à parier contre un qu'elles sont inégales. L'*égalité* est un *cas singulier,* absolument *exceptionnel :* l'*inégalité* est le *cas général*. Le signe négatif $\neq$ a ce tort de traiter le *cas général* comme *la négation du cas singulier,* de définir en quelque sorte celui-là par celui-ci. C'est un non-sens philosophique. Il vaut donc beaucoup mieux se servir du signe double $\lesseqgtr$. La seule objection qu'on pourrait faire à ce signe proviendrait de ce que, pour les imaginaires, on ne sait ce qu'il faut entendre par plus grand ou plus petit. Mais est-on tenu de se rappeler toujours l'étymologie d'un signe? Mais les imaginaires ne se traitent-elles pas constam-

ment, dans le langage, l'écriture et le calcul, comme s'y traitent les quantités réelles ?

### Sur les relations mathématiques.

269. Les signes d'égalité, d'identité, de congruence, d'équipollence, c'est-à-dire les signes $=$, $\equiv$, $\equiv$, $\triangleq$, sont tous des *signes simples;* comme tels, ils devraient être tous formés d'un *élément unique* ou d'*éléments unis entre eux;* ils sont composés tous d'éléments non significatifs séparés : c'est un défaut grave en théorie, mais sans inconvénient dans la pratique. Les signes d'équivalence et d'inégalité, c'est-à-dire les trois signes $\sim$, $>$, $<$, ne nous présentent point ce défaut, puisqu'ils sont chacun formés d'un seul trait.

Ces mêmes signes d'égalité, d'identité, de congruence, d'équipollence nous offrent tous les quatre les *mêmes parties à droite et à gauche;* ils sont chacun *symétriques* par rapport à un axe vertical; leur signification exigeait cette symétrie : elle y est donc une qualité. Le *signe d'équivalence* $\sim$ est le signe dissymétrique d'une relation symétrique; il rappelle par sa forme la lettre S et, par conséquent, l'idée de similitude : c'est un signe assez mal fait. Au contraire, les *signes d'inégalité* sont des signes *excellents :* ils devaient être dissymétriques et ils le sont; ils montrent très bien par leur forme qu'on passe, dans les relations où ils figurent, avec le signe $<$ d'une *quantité plus petite* à une *plus grande,* avec le signe $>$ d'une *plus grande* à une *plus petite;* ils nous rappellent tout à fait les signes musicaux nommés *crescendo, decrescendo,* et vulgairement *soufflets;* ils sont comme ceux-ci des signes très expressifs et par conséquent très bons.

Les signes de relation *négatifs,* les signes de relation *doubles* sont ceux-là des signes simples, ceux-ci des signes complexes; leurs défauts et leurs qualités sont analogues à ceux ou à celles que nous venons d'étudier sur les signes de relation proprement dits.

270. Quoi qu'il en soit, toute *relation mathématique* se compose de trois parties : à gauche, l'expression constituant le premier membre; au milieu, le signe de relation; à droite, l'expression

constituant le second membre. C'est une *proposition véritable* dont le premier membre est le *sujet,* dont le signe de relation est le *verbe,* dont le second membre est l'*attribut*. En toute proposition ces trois parties sont importantes, mais c'est celle du milieu, c'est le verbe qui joue le rôle prépondérant. En toute relation mathématique donc, ce rôle prépondérant appartient au signe de relation. Voilà pourquoi ce signe y doit toujours être très fort, très marqué; y doit toujours posséder, dans le sens horizontal, une *assez grande longueur*. D'ailleurs, une relation mathématique quelconque doit toujours être écrite de façon telle que l'œil y distingue immédiatement, sans hésitation ni peine, le premier membre, le second membre, et le signe qui les unit.

---

# CHAPITRE IX.

## NOTATIONS DE LA GÉOMÉTRIE.

### Objets de la Géométrie.

271. Les *objets* dont s'occupe la *Géométrie* sont les uns *simples*, les autres *complexes*. Les objets *simples* sont le *point*, la *ligne*, la *surface*. Les objets *complexes* sont les *figures composées* de deux ou plusieurs de ces objets simples.

272. Lorsque tous les éléments composant une figure sont situés dans un *même plan*, cette figure est dite *plane;* elle peut être *tracée exactement*. Lorsque ces éléments *ne sont pas tous* dans un *même plan*, elle ne peut être *tracée* ainsi : il faut se borner à la représenter, d'une façon plus ou moins imparfaite, à l'aide des *procédés graphiques* fondés sur les *projections*, à l'aide de ceux principalement qui constituent la *géométrie descriptive*.

On peut aussi parler d'une figure, et raisonner sur elle, sans faire *aucun tracé*, sans avoir recours à aucun *mode de représentation*, rien qu'en lui attribuant un nom ou un signe. Il est, dans beaucoup de cas, avantageux de procéder ainsi; il est même quelquefois impossible de procéder autrement : c'est ce qui arrive en particulier lorsqu'on étudie la géométrie dans les espaces à plus de trois dimensions.

### Figures planes rectilignes.

273. Soit sur le papier, soit sur le tableau noir, les figures *planes* se *tracent exactement*, comme on vient de le dire, et leurs différentes parties se distinguent les unes des autres au moyen de

*lettres*. Ces lettres peuvent être latines ou grecques, majuscules ou minuscules, employées telles quelles ou affectées d'indices et d'accents. Elles peuvent nous offrir toutes les variétés dont nous avons précédemment parlé (119). On les peut même remplacer par des *chiffres* ou *numéros*.

274. Un *point* placé n'importe où se désigne par une lettre unique : le point A.

Une *droite* tracée se désigne par une lettre unique ou par les lettres correspondant à deux de ses points : la droite $\Delta$, la droite AB. Lorsque l'on a en vue, non pas la droite indéfinie, mais le segment de cette droite compris entre les points A et B, il est bon de placer un trait au-dessus du couple de ces lettres, en cette sorte $\overline{AB}$. On pourrait aussi indiquer la longueur de ce segment par une minuscule, latine ou grecque, placée en son milieu.

Un *angle* s'indique tantôt par une lettre unique, placée à son sommet; tantôt par trois lettres placées l'une au sommet, les deux autres sur les côtés. C'est l'usage de mettre la lettre du sommet entre les deux autres; c'est l'usage aussi de mettre une sorte d'accent circonflexe au-dessus de la lettre unique ou du groupe de trois lettres qui représente l'angle. La grandeur de l'angle peut, d'ailleurs, s'indiquer par une minuscule, $\omega$ par exemple, placée en son intérieur. L'angle des deux directions OP, OQ se désigne par $\widehat{OP, OQ}$.

275. Une *ligne brisée* quelconque se désigne par les lettres majuscules placées en ses sommets. Les *longueurs* de ses éléments, par des lettres minuscules placées vers leurs milieux. L'*angle de deux éléments* consécutifs, par les trois lettres correspondant aux trois sommets de la ligne brisée que ces éléments nous présentent, ou par la lettre unique placée au sommet qui leur est commun.

Un *triangle* se désigne tantôt par une lettre unique : le triangle T; tantôt par trois lettres placées en ses trois sommets : le triangle ABC. Les côtés s'en indiquent par les lettres des deux sommets qu'ils joignent : les côtés BC, CA, AB; les longueurs de ces côtés par les minuscules correspondant aux majuscules des sommets opposés : les côtés $a$, $b$, $c$. Il est à remarquer, en Trigonométrie, que les angles

du triangle se représentent toujours chacun par une seule lettre : la majuscule placée à son sommet.

Le *quadrilatère,* le *pentagone* et, en général, tous les *polygones* se désignent par les lettres placées en leurs sommets. Les angles de ces figures s'indiquent respectivement par ces mêmes lettres. Parfois, on abrège beaucoup : on désigne un quadrilatère par deux lettres placées en deux sommets opposés; un polygone, dont on ne considère que la superficie, par une lettre unique, placée en son intérieur; etc., etc.

### Figures planes curvilignes.

276. Une *circonférence* de cercle peut se désigner par une seule lettre, placée alors en son centre : la circonférence O, la circonférence ω. Ou bien par une lettre marquant le centre et une autre donnant la longueur du rayon : la circonférence de centre O et de rayon R. Ou bien par trois lettres, placées en trois quelconques de ses points.

Une *ellipse* se désignera, suivant les cas : par une lettre unique placée en son centre; ou par les quatre lettres placées en ses quatre sommets; ou par cinq lettres placées en cinq quelconques de ses points. Une *hyperbole* se désignera encore de cette façon; une *branche d'hyperbole* s'indiquera par une, deux ou trois lettres. Il en sera de même pour une *parabole,* une *cissoïde,* une *strophoïde,* un *limaçon,* etc., etc.

### Figures polyédriques.

277. Les figures *non planes* ne peuvent se tracer exactement ni sur le tableau noir ni sur les pages d'un livre. On les y *dessine,* en général, comme on les voit, c'est-à-dire en *perspective.*

278. Le *plan* est une surface indéfinie : on en figure une partie limitée, qui est le plus souvent rectangulaire, mais qui prend sur le dessin l'aspect d'un parallélogramme : certains auteurs et professeurs le représentent aussi par un angle. Quelque mode qu'on

emploie, on y affecte : tantôt une lettre unique, le plan P; tantôt deux, le plan PQ; tantôt trois, le plan ABC.

L'*angle dièdre* est la figure formée par deux plans qui se coupent et se terminent à leur droite d'intersection. Ces plans sont les faces du dièdre; cette droite en est l'arête. On représente un dièdre : tantôt par une lettre unique, placée en son intérieur, le dièdre D; tantôt par deux lettres placées respectivement sur les deux faces, le dièdre PQ; tantôt par quatre lettres, placées une sur chaque face et deux sur l'arête, le dièdre ABCD. Par analogie avec ce qu'on fait, en géométrie plane, pour les angles, on met au milieu du groupe les deux lettres placées sur l'arête.

Un *trièdre* est la figure formée par trois plans qui passent par un même point et se terminent à leurs intersections. Le point unique est le sommet du trièdre, les trois plans en sont les faces; leurs droites d'intersection, les arêtes. On désigne un trièdre : tantôt par une lettre unique placée à côté de lui, ou en son intérieur, ou à son sommet, le trièdre T; tantôt par quatre lettres, placées l'une au sommet, les trois autres respectivement sur les trois arêtes, le trièdre SABC. C'est un bon usage que de mettre la lettre du sommet la première et de la faire suivre d'une virgule, en cette sorte S, ABC. D'ailleurs, un trièdre présente six éléments : trois dièdres et trois faces. Les dièdres s'indiquent par les majuscules A, B, C, placées sur leurs arêtes respectives; les faces opposées par les minuscules correspondantes, $a$, $b$, $c$.

279. Le plus simple des *polyèdres* est le *tétraèdre* ou *pyramide triangulaire*. On le désigne : par une lettre unique, placée à côté de lui, ou par quatre lettres placées en ses quatre sommets. Souvent on considère l'un de ses sommets d'une façon particulière : c'est alors le sommet proprement dit. On place en tête du groupe des quatre lettres celle de ces lettres qui lui correspond et on la fait suivre d'une virgule : le tétraèdre S, ABC. On opère de même pour désigner une *pyramide quelconque*. On écrit d'abord la lettre placée au sommet; ensuite celles qui servent à nommer le polygone de base : la pyramide pentagonale S, ABCDE. Il va sans dire que, dans certains cas, on désigne la pyramide par une lettre unique. C'est, d'ailleurs, ce qu'on peut faire pour une figure quelconque.

Les *polyèdres* qui nous présentent deux bases parallèles, tels

que les prismes, les tas de pierres, les troncs de pyramides considérés habituellement, se désignent le plus souvent par plusieurs lettres, placées les unes autour de la base inférieure, les autres autour de la supérieure. Les *polyèdres réguliers,* les *polyèdres quelconques,* se désignent par des lettres placées à tous leurs sommets ou seulement à quelques-uns d'entre eux.

### Figures courbes dans l'espace.

280. Les *cylindres* sont analogues aux *prismes :* ils se désignent comme eux par des lettres placées sur leurs deux bases. Les *cônes* sont analogues aux *pyramides;* ils se désignent comme elles par des lettres placées sur leur base, et par une lettre unique placée à leur sommet.

La *sphère* se nomme : à l'aide d'une lettre unique placée en son centre : la sphère O; ou de deux lettres placées aux extrémités d'un rayon : la sphère OA; ou de quatre lettres placées en quatre points quelconques de sa surface : la sphère ABCD. Un *ellipsoïde,* un *hyperboloïde,* un *paraboloïde,* une *surface quelconque* peuvent se désigner de même par une ou plusieurs lettres.

281. Quant aux *lignes à double courbure isolées* dans l'espace, et *aux lignes tracées sur les différentes surfaces,* elles s'indiquent le plus souvent par des lettres marquées en deux ou trois de leurs points. C'est ce qui a lieu pour les cubiques gauches; pour les différentes hélices qu'on peut tracer sur un cylindre; pour les cercles petits ou grands qu'on peut tracer sur la sphère; pour les lignes de courbure, les lignes asymptotiques, les lignes géodésiques des différentes surfaces. Il est à remarquer que, sur la sphère, les arcs de grands cercles jouent un rôle fort analogue à celui des droites du plan; qu'ils s'indiquent par les mêmes moyens; et que les triangles sphériques se nomment comme les triangles rectilignes : leurs angles se désignant par A, B, C et leurs côtés par $a$, $b$, $c$.

### Des projections en général.

282. La *projection d'un point sur une surface,* c'est, de la façon la plus générale, l'*un des points où cette surface est percée*

*par une droite indéfinie passant par le point donné et satisfaisant, en outre, à deux conditions simples.* Cette *droite,* qui est complètement déterminée, se nomme la *projetante;* et la *surface* sur laquelle on projette, la *surface de projection.* On désigne d'ordinaire le point projeté par une majuscule, le point A; et le point qui en est la projection par la minuscule correspondante, *a*.

La *projection de la figure composée des points* A, B, C, ..., c'est la *figure composée des points* $a$, $b$, $c$, ... qui en sont les projections respectives. En particulier, la projection d'une ligne $\Lambda$, c'est le lieu, $\lambda$, des projections de tous les points de cette ligne. Les *projetantes* de tous ces points forment une surface réglée que l'on appelle *surface projetante*.

On peut imaginer une multitude de systèmes de projections. Ces différents systèmes se distinguent les uns des autres par la nature des conditions qui achèvent de déterminer la projetante de chaque point. Les plus importants d'entre eux, les seuls employés fréquemment, sont : le système des *projections coniques* et le système des *projections cylindriques*.

283. Dans le premier, toutes les droites projetantes passent par un même point, que l'on désigne le plus souvent par O. La *surface projetante* d'une ligne quelconque est un *cône :* de là le nom de *projection conique.* C'est le système des projections coniques qui nous donne ce qu'on appelle l'*ombre au flambeau* d'une figure; c'est lui aussi qui nous en donne la *perspective;* c'est même en l'étude de ce système de projections que consiste presque uniquement la science de la *perspective linéaire,* de la perspective proprement dite. En cette science, on regarde les droites projetantes comme des rayons lumineux, comme des rayons visuels, et le point où elles concourent comme le point de vue, comme l'œil de l'observateur. La surface de projection se nomme alors *surface du tableau;* si elle est un plan, c'est le plan du tableau. Quant aux notations qu'on y emploie, ce sont précisément celles que nous venons d'indiquer.

284. Ce sont ces mêmes notations qu'on emploie dans notre second système de projections. Dans ce second système, les projetantes des points A, B, C, ..., au lieu de passer toutes par un

même point O, sont toutes parallèles à une même droite Δ. Les projetantes des différents points d'une ligne quelconque forment donc un *cylindre* projetant : de là le nom de *projections cylindriques*. Lorsque la surface sur laquelle on projette se réduit à un plan, la projection cylindrique est *oblique* ou *orthogonale* suivant que les projetantes sont obliques ou perpendiculaires à ce plan. On dit, dans l'un et l'autre cas, que la figure *abc*..., projection cylindrique de ABC..., en est l'*ombre au soleil*. On dit aussi qu'elle en est la *perspective cavalière*.

### Géométrie descriptive.

285. La *perspective linéaire* représente les objets de l'espace *tels que nous les voyons*. On peut se proposer de les représenter *tels qu'ils sont*. On y parvient surtout par les procédés de la *géométrie descriptive*.

286. En *géométrie descriptive*, toute figure se représente par ses *projections orthogonales* sur *deux plans perpendiculaires entre eux*. L'un de ces plans est le plan *horizontal;* l'autre, le plan *vertical;* leur droite d'intersection s'appelle la *ligne de terre* et se désigne par $xy$ ou LT. Les projections de la figure sur ces deux plans se nomment respectivement la *projection horizontale* et la *projection verticale*. Pour les réunir sur un plan unique, on fait tourner d'un angle droit le plan vertical autour de la ligne de terre, de telle sorte que la partie supérieure de ce plan vertical vienne s'appliquer sur la portion postérieure du plan horizontal. Après ce rabattement, les deux projections ne forment plus, sur une même feuille, qu'un dessin unique : on l'appelle une *épure*.

287. La *projection horizontale* d'un point A de l'espace se désigne par $a$; sa *projection verticale* par $a'$. Ces deux projections, dans l'épure, sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; cette perpendiculaire, appelée *ligne de rappel*, coupe la ligne de terre en un point qu'on désigne par $\alpha$.

Une *droite* se détermine, en général, par deux de ses points : celui qui a pour projections $a$ et $a'$; celui qui a pour projections

$b$ et $b'$. Les projections de cette droite sont donc les deux droites $ab$, $a'b'$ : on dit la droite $ab$, $a'b'$. Souvent aussi, appelant D et D′ les projections horizontale et verticale de la droite, on nomme celle-ci la droite DD′. Une parallèle au plan horizontal de projection s'appelle une *horizontale :* on la désigne par HH′ ; une parallèle au plan vertical s'appelle une *ligne de front :* on la désigne par FF′.

On détermine un *plan :* soit par trois points, le plan $aa'$, $bb'$, $cc'$ ; soit par une droite et un point, le plan DD′, $aa'$ ; soit par deux droites qui se coupent ; soit par deux droites parallèles. En particulier, on peut déterminer un plan par ses traces, c'est-à-dire par les droites suivant lesquelles il coupe les plans de projection : le plan POP′, la lettre O désignant le point situé sur la ligne de terre. Un plan horizontal est déterminé et désigné par sa seule trace verticale V′ ; un plan de front, par sa seule trace horizontale H ; un plan de profil, c'est-à-dire un plan perpendiculaire à la ligne de terre, par le seul point ω où il coupe cette ligne.

288. Un *triangle de l'espace* se désignera par ses deux projections : le triangle $abc$, $a'b'c'$. Une pyramide, par les projections de son sommet et par celles de sa base : la *pyramide* $s$, $s'$ ; $abcd$, $a'b'c'd'$. Un *prisme,* par les projections de ses deux bases : le prisme $def$, $d'e'f'$ ; $d_1\ e_1\ f_1$, $d'_1\ e'_1\ f'_1$. Une *ligne de l'espace,* par ses deux projections : la ligne $abc$, $a'b'c'$. Une *surface de révolution,* par son axe et l'une de ses génératrices, etc., etc.

289. Les *lignes* qu'on voit sur une épure sont de deux sortes : celles qui servent à la *représentation* des figures de l'espace ; celles qui servent seulement au tracé de l'épure. Celles-ci se nomment d'ordinaire lignes de *construction :* on les trace soit à l'encre rouge, soit en pointillé, c'est-à-dire en petits traits fort rapprochés les uns des autres. Celles-là appartiennent aux données ou aux résultats : elles sont *pleines* ou *ponctuées* suivant que les portions de figure qu'elles représentent sont, pour le spectateur, visibles ou cachées.

290. La *géométrie descriptive* et les différentes sortes de *perspectives* ne sont d'ailleurs que des applications de la théorie des *projections.* Celle-ci constitue une méthode de transformation et

de recherche qu'on peut étudier en elle-même. Les propriétés d'une figure qui subsistent lorsqu'on la projette sont ce qu'on appelle, depuis Poncelet, les *propriétés projectives*. Elles font l'objet de la *géométrie projective* (707) sur laquelle nous devrons, dans notre seconde Partie, revenir et insister.

### Lettres sur les figures.

291. Bien que les objets dont s'occupe la Géométrie soient des êtres de pure raison : points sans dimensions, lignes sans épaisseur ni largeur, surfaces sans épaisseur, on les considère forcément, lorsqu'on les dessine, comme des êtres matériels. On représente le plan comme une sorte de planchette, le dièdre comme un livre ouvert, le cube et la sphère comme des masses pleines; on marque les différentes parties de la figure de façon à distinguer ce qui est en avant de ce qui est en arrière et, comme en géométrie descriptive, ce qui est visible de ce qui est caché. Tout cela donne plus de relief aux figures non planes; permet de les mieux comprendre; et, comme on dit, aide à *voir dans l'espace*.

292. Lorsqu'on place des lettres sur les figures ainsi tracées, il faut les y placer de telle sorte qu'il n'y ait nulle hésitation sur les parties de ces figures auxquelles ces lettres se rapportent. On placera donc la lettre désignant un point, très proche de ce point; celle qui désigne un angle, au sommet ou à l'intérieur de cet angle; celle qui désigne la longueur d'un segment, très proche du milieu de ce segment; celle qui désigne une aire, à l'intérieur de cette aire, et de façon telle qu'elle ne paraisse point se rapporter à un élément particulier du contour.

On place d'ordinaire les lettres sur la figure au fur et à mesure qu'on la construit. Lorsqu'on opère ainsi, il faut tenir grand compte des conseils qui précèdent. Si une lettre, par exemple, n'était point suffisamment rapprochée de l'élément qu'elle désigne, il pourrait arriver que l'on fût conduit, par la suite des constructions, à placer, plus près de cet élément, une lettre qui ne s'y rapporterait point.

On peut employer, à volonté, des lettres majuscules ou minuscules : celles-ci ont l'avantage d'occuper moins de place. En certains

Livres, dus à des géomètres éminents ([1]), on n'emploie que des minuscules.

293. Combien faut-il mettre de lettres sur une figure, pour la nommer et l'étudier? S'il ne s'agit que de la nommer, il suffit souvent d'une lettre unique. S'il s'agit de l'étudier, il faut assez de lettres pour pouvoir désigner non seulement l'ensemble de la figure, mais aussi, séparément, chacun des éléments qu'on y doit considérer. Il existe, dans chaque cas, un nombre de lettres nécessaire et suffisant. On peut dire, d'ailleurs, que ce nombre de lettres, nécessaire et suffisant, dépend, à la fois, et de la figure et des circonstances où on la considère; et qu'il diffère, en général, du nombre des conditions analytiques simples qui la déterminent. Il est rare qu'il faille marquer 4 lettres sur une parabole, ou 5 sur une ellipse.

### Géométrie sans figure.

294. Dans les *espaces d'ordre supérieur,* il est, nous l'avons dit, impossible de tracer les figures. Dans les *espaces ordinaires,* il est difficile de dessiner celles qui sont un peu compliquées. Aussi emploie-t-on des images *stéréoscopiques* pour montrer certaines lignes, certaines surfaces. Même sur le plan, il peut arriver qu'une figure, ou trop particulière ou imparfaitement dessinée, trompe l'observateur, et le conduise à de faux raisonnements. Pour ces différentes raisons, on se dispense parfois de tracer les figures. C'est ce qu'on fait sinon toujours, du moins très souvent dans quelques Ouvrages élémentaires; dans plusieurs Cours de Géométrie analytique; dans certains Traités de Géométrie projective; et, surtout, dans la Géométrie analytique supérieure de Monge et de Gauss.

Cette suppression de tout tracé a encore d'autres avantages. Elle épargne à l'auditeur, au lecteur la peine de recourir sans cesse à la figure dessinée. Elle empêche qu'une partie de l'attention nécessaire pour bien entendre une démonstration ne soit employée à démêler un ensemble de lignes et de points. Elle débarrasse la chaîne des raisonnements de l'encombrement des représentations graphiques.

---

([1]) Par exemple : BOBILLIER, *Cours de Géométrie,* 11e édition, in-8°, Paris, 1857.

Elle laisse l'esprit en face de la définition abstraite de la figure, sans le troubler par une image concrète, forcément particulière. Elle donne enfin le moyen d'obtenir dans le langage une grande brièveté et, par conséquent, une grande clarté.

295. N'est-il pas trop long de désigner une droite par 2 lettres, un angle par 3, un quadrilatère par 4, ...? Lorsqu'on ne trace pas de figure, on désigne chacun des objets dont on s'occupe de la façon la plus courte. Quand l'objet est simple ou regardé comme tel, on lui assigne une lettre unique, afin que le signe soit simple, et rappelle par sa simplicité celle de son objet. On dit ainsi le point $a$, la droite D, la distance $\partial$, la longueur $l$, la parallèle P, l'angle $\omega$, le triangle T, l'aire A, la surface S, la courbe gauche C, le volume V. Très souvent la lettre ainsi employée se place entre parenthèses; on écrit : la ligne (L), la surface ($\Sigma$), le faisceau de courbes (C), le système de surfaces (S).

Le langage se trouve ainsi notablement abrégé et simplifié. On arrive à des phrases comme celles-ci : *les angles* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont égaux; — le point a est situé sur le cercle* (C); *— la droite* (D) *est tangente à la courbe* (T); *— les surfaces* (S) *et* ($\Sigma$) *se coupent orthogonalement; — la surface* (C) *reste tangente à une enveloppe* [C]; *— telle portion de la surface* ($\Sigma$) *est limitée par un contour* (C).

Les énoncés des théorèmes prennent aussi des formes simples et nettes. Je n'en citerai que cet exemple : *Si l'on peut tracer, sur une surface algébrique* S, *une série de courbes* C, *de même genre* $p$ *et de mêmes modules, on peut y tracer une seconde série de courbes* C', *de même genre* $p'$ *et de mêmes modules* [1].

296. Quant aux figures complexes non tracées, elles se désignent par des signes complexes, formés d'éléments simples correspondant aux éléments simples des figures. Ces figures étant infiniment nombreuses et variées, leurs signes sont infiniment nombreux et variés. On les forme d'une manière régulière, systématique (707), par des procédés uniformes que nous exposerons plus loin.

---

[1] Georges Humbert, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. III, 1889, p. 277.

# CHAPITRE X.

## SIGNES DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

### Coordonnées.

297. La *Géométrie analytique* proprement dite est due à Descartes; elle représente et étudie les figures à l'aide des équations; elle est fondée sur l'emploi des *coordonnées*.

On appelle *coordonnées*, certaines quantités qui déterminent, toutes ensemble, la figure prise comme élément. Pendant longtemps, on n'a pris pour élément que le point; on a pris plus tard la droite, le plan, la sphère, etc., etc.

298. Sur un *axe* fixe X'X, portant un point fixe O, on détermine la position d'un point quelconque M, en faisant connaître la longueur du segment OM, et en affectant cette longueur du signe + ou du signe — suivant que, sur cet axe X'X, le point M est situé d'un côté ou de l'autre du point O. Cette longueur, avec son signe, se désigne par $x$ : c'est la coordonnée du point M; on dit plus particulièrement que c'en est l'*abscisse;* l'axe X'X est l'*axe* des $x$ ou des abscisses; le point O en est l'*origine*.

Sur un *plan*, un point quelconque M est parfaitement déterminé lorsqu'on connaît ses projections sur deux axes fixes qui se coupent. On désigne respectivement ces axes par X'X et Y'Y; on appelle O leur point d'intersection; et l'on projette le point M sur chacun d'eux, parallèlement à l'autre. On détermine la position de la projection sur X'X par sa distance $x$ au point O, prise avec son signe; on détermine de même la position de la projection sur Y'Y par la longueur positive ou négative $y$. Le point est complètement déterminé par $x$ et $y$ qui en sont les coordonnées; $x$ l'*abscisse*, $y$ l'*ordonnée*.

Dans l'*espace,* on considère trois axes fixes X'X, Y'Y, Z'Z, passant par un même point et non situés dans un même plan. Pour déterminer un point quelconque M, on le projette sur chacun de ces axes, parallèlement au plan des deux autres, et l'on donne les longueurs $x$, $y$, $z$, positives ou négatives, qui font connaître la position de chaque projection sur son axe. Ces trois longueurs sont les coordonnées du point : $x$ en est l'*abscisse;* $y$, l'*ordonnée;* $z$, la *cote*.

On dit, d'ailleurs, que ces coordonnées, dans l'espace comme sur le plan, sont rectangulaires ou obliques, suivant que les axes sont rectangulaires deux à deux, ou ne le sont pas.

299. Les coordonnées que nous venons de définir se nomment coordonnées *rectilignes* ou coordonnées *cartésiennes*. Le système qu'elles forment est le plus employé et ordinairement le plus commode. Mais il en existe une infinité d'autres.

Tels sont les systèmes *bi-polaire* et *tri-polaire,* où un point est déterminé : dans le plan, par ses distances $u$ et $v$ à deux points ou *pôles* fixes; dans l'espace, par ses distances $u$, $v$, $w$ à *trois* points ou pôles.

Tels sont surtout les systèmes des coordonnées *polaires* proprement dites, où un point est déterminé : dans le plan par une *longueur* et un *angle;* dans l'espace, par une *longueur* et *deux angles*. Dans le plan, on considère un point fixe O appelé *pôle* et une demi-droite fixe OX, appelée *axe polaire;* les coordonnées du point M sont la longueur du *rayon* OM et l'*angle polaire* $\widehat{XOM}$ : on les désigne tantôt par $\rho$ et $\omega$, tantôt par $r$ et $\theta$. Dans l'espace, on considère une demi-droite fixe OZ qu'on suppose verticale; un plan fixe passant par O, perpendiculaire à OZ, par conséquent horizontal; et, dans ce plan, une demi-droite OX; les coordonnées du point M de l'espace sont : le *rayon vecteur* OM; l'*azimut,* c'est-à-dire l'angle de OX avec la projection de OM sur le plan horizontal; enfin la *distance zénithale* qui n'est autre que l'angle $\widehat{ZOM}$; le rayon vecteur se désigne par $\rho$, l'azimut par $\varphi$ ou $\psi$, la distance zénithale par $\zeta$ ou $\theta$.

### Généralités sur les coordonnées.

300. Un *système de coordonnées* est *homogène,* lorsque les coordonnées de chaque point y sont toutes des quantités de même nature. Le système des coordonnées rectilignes, les systèmes bi-polaire et tri-polaire sont homogènes, car les coordonnées de chaque point y sont toutes des longueurs. Le système polaire ne l'est pas, puisqu'il nous présente à la fois des longueurs et des angles.

Un *système de coordonnées* est *parfait* lorsque, à tout point déterminé, correspond, pour chaque coordonnée, une valeur numérique unique, et que, réciproquement, à tout groupe donné de valeurs numériques des coordonnées, correspond un point unique. Des différents systèmes de coordonnées dont nous venons de parler un seul est parfait : celui des coordonnées rectilignes.

301. De la manière la plus générale, les systèmes de coordonnées, soit sur une surface, soit dans l'espace, peuvent se définir ainsi. Considérons, sur une *surface, deux familles de lignes,* dépendant respectivement des *paramètres* $\lambda$ et $\mu$, et telles que, par chaque point, passe une ligne de chaque famille, mais une seule : les valeurs numériques des paramètres $\lambda$ et $\mu$, qui correspondent aux deux lignes se coupant en un point, sont les *coordonnées* de ce point. Dans l'*espace,* on considère de même *trois familles de surfaces,* dépendant respectivement des trois *paramètres* $\lambda$, $\mu$, $\nu$, et telles que, par chaque point, passe une surface de chaque famille, mais une seule; les valeurs numériques des paramètres répondant aux trois surfaces passant par un point sont les *coordonnées* de ce point. Telles sont les définitions, soit sur une surface, soit dans l'espace, de ce qu'on appelle les *coordonnées curvilignes.*

302. Quelles que soient les coordonnées employées, nous voyons que, pour déterminer la position d'un point, il en faut : une sur une ligne, deux sur une surface, trois dans l'espace. Pour des raisons que nous dirons plus tard (1010), on en prend parfois un plus grand nombre, lesquelles alors, évidemment, ne sont pas indépen-

dantes les unes des autres. C'est ce qu'on fait dans les coordonnées *homogènes,* dans les coordonnées *trilatères,* dans les coordonnées *tétraédriques;* c'est ce qu'on fait surtout, d'une manière systématique, dans les coordonnées *surabondantes* de Bobillier et de Paul Serret [1].

303. Lorsque l'on considère le point comme l'élément de l'étendue, on n'a besoin que de définir les coordonnées du point. C'est ce que nous venons de faire. Quand on considère comme élément la droite, le plan, la sphère, ..., on doit définir leurs coordonnées, c'est-à-dire les quantités qui les déterminent. Ces quantités sont, pour la droite : dans la géométrie plane, au nombre de deux; dans la géométrie de l'espace, au nombre de quatre. Elles sont pour le plan, au nombre de trois; pour la sphère, au nombre de quatre; etc., etc.

### Des lettres en Géométrie analytique.

304. En Géométrie analytique, on désigne d'ordinaire un point quelconque par une lettre majuscule ou minuscule, latine ou grecque, laissée telle quelle ou affectée soit d'indices, soit d'accents. C'est l'usage d'employer la lettre M pour le *point* qui décrit une courbe; la lettre P, pour le *pied* de l'ordonnée ou de la cote; la lettre C, pour le *centre* d'un cercle; la lettre F, pour le *foyer* d'une parabole; etc., etc. Parfois aussi, on emploie des *chiffres :* les sommets d'un triangle se numérotent 1, 2, 3.

305. Sur la figure, la *tangente* à une courbe en un point M se désigne par MT et parfois par T′MT, les points T′ et T étant toujours placés de part et d'autre du point M. La *normale* en M à une courbe plane ou à une surface se désigne de même par MN ou N′MN.

On sait ce qu'il faut entendre, en géométrie plane, soit dans le cas des coordonnées rectilignes, soit dans celui des coordonnées polaires, par les mots *sous-tangente, sous-normale, tangente, normale.* Ce sont quatre segments de droite. On les désigne par $S_t$, $S_n$, T, N.

---

[1] Né en 1827, mort en 1898.

306. La longueur de l'*arc* d'une courbe plane ou gauche se désigne par $s$; le *rayon de courbure* en un point par R; le *rayon de torsion* par T; la *courbure* et la *torsion* elles-mêmes, qui sont les inverses de ces rayons, par $r$ et $t$. L'angle de *contingence* se nomme presque toujours $\varepsilon$.

En tout point d'une courbe gauche existe un trièdre trirectangle remarquable, celui qui a pour arêtes la *tangente*, la *normale principale* et la *bi-normale*. La tangente se désigne toujours par MT; la normale principale, par MN; la bi-normale, par MB.

Une *courbe* de l'espace s'appelant (C), ses projections sur les plans des coordonnées s'appellent respectivement $(C_x)$, $(C_y)$, $(C_z)$. Une *aire* A de l'espace a pour projections sur ces mêmes plans $A_x$, $A_y$, $A_z$.

Il est enfin certaines notations, relatives aux courbes du second degré, que l'usage a pour ainsi dire consacrées, et que nous ne pouvons taire : $a$ et $b$, pour les demi-axes des coniques à centre; $c$, pour la distance du centre au foyer; $e$ et $p$, pour l'*excentricité* et le *paramètre*.

### Points; coefficients directeurs.

307. Les coordonnées du point qui décrit une courbe sont ce qu'on appelle les *coordonnées courantes*. On les désigne sur le plan par $x$, $y$, et quelquefois par X, Y; ce dernier mode offrant cet avantage de laisser disponibles, pour les coordonnées d'un point particulier fixe, les minuscules $x$, $y$. On fait de même dans l'espace : X, Y, Z étant les coordonnées courantes, et $x$, $y$, $z$ celles d'un point particulier. Quand on représente les coordonnées courantes par $x$, $y$, $z$, celles d'un point fixe particulier se désignent souvent par $x_0$, $y_0$, $z_0$. Les coordonnées courantes ne s'affectent jamais ni d'indices, ni d'accents.

On désigne souvent un point par ses coordonnées; on dit : sur le plan, le point $(x, y)$, le point $(a, b)$; dans l'espace, le point $(x, y, z)$, e point $(a, b, c)$.

Sur le plan, en coordonnées polaires, les coordonnées du point qui décrit la courbe se désignent tantôt par $\rho$ et $\omega$, tantôt par $r$ et $\theta$; celles d'un point particulier se désignent par ces mêmes lettres

affectées d'un indice, $\rho_0$ et $\omega_0$ ou bien $r_0$ et $\theta_0$. On dit aussi : le point $(\rho, \omega)$, le point $(\rho_0, \omega_0)$.

308. Une *direction* se détermine, en général : dans le plan, par *deux coefficients* $\alpha$, $\beta$; dans l'espace, par *trois*. Ces coefficients ne sont que les coordonnées d'un point pris sur une demi-droite, parallèle à la direction et issue de l'origine. Quand les axes sont rectangulaires, ce ne sont que des nombres proportionnels aux cosinus des angles que fait la partie positive de la direction avec les parties positives des axes; et, très souvent, que ces cosinus eux-mêmes. On dit : sur le plan, la direction $(\alpha, \beta)$; dans l'espace, la direction $(\alpha, \beta, \gamma)$.

Si nous nous reportons au trièdre trirectangle remarquable (306) dont nous avons parlé : on désigne les *cosinus directeurs* de la tangente par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; ceux de la normale principale, par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$; ceux de la binormale, par $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$. Ce sont ces notations qu'on emploie dans les formules si utiles de Frenet [1].

### Équations de la Géométrie analytique.

309. La différence profonde qui existe entre les points d'une ligne et les points d'une surface, c'est que les coordonnées des premiers sont fonctions d'*une seule* variable indépendante ou, comme on dit, d'un seul paramètre, tandis que celles des seconds sont fonctions de *deux* variables indépendantes, de deux paramètres. Si l'on désigne le paramètre unique par $t$, les deux paramètres par $u$ et $v$, on représente : une *courbe plane* par les deux équations

$$x = f(t), \qquad y = g(t);$$

une *courbe de l'espace* par les trois équations

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t);$$

une *surface* par les trois équations

$$x = F(u, v), \qquad y = G(u, v), \qquad z = H(u, v).$$

C'est là ce qu'on appelle la représentation *paramétrique* de ces

---

[1] Né en 1856, mort en 1900.

courbes et de cette surface. Ce mode de représentation est le plus naturel; il est aussi le plus commode pour l'étude du lieu que l'on considère, et pour sa construction.

310. Mais on peut, entre les équations précédentes, éliminer le ou les paramètres arbitraires. On arrive ainsi à représenter : une *ligne plane,* dans son plan, par l'équation

$$\varphi(x, y) = 0;$$

une *ligne dans l'espace* par les deux équations

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \chi(x, y) = 0;$$

une *surface* par l'équation unique

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

qu'on suppose, très souvent, résolue par rapport à $z$.

En certains Livres et Cours, cette dernière façon de représenter les lignes et les surfaces est la seule employée; la représentation paramétrique n'y figure point.

311. Si l'on désigne toujours par $u$ et $v$ les deux *variables indépendantes* dont dépendent les coordonnées de chaque point d'une surface, *toute ligne* tracée sur cette surface sera représentée par une relation entre $u$ et $v$, telle que

$$\varphi(u, v) = 0.$$

Il en sera ainsi des lignes de courbure, des lignes asymptotiques, des réseaux conjugués; etc., etc.

Les *familles de courbes* se représentent, sous forme ordinaire : *dans le plan* par

$$f(x, y; a) = 0;$$

*dans l'espace* par

$$f(x, y, z; a) = 0, \qquad g(x, y, z; a) = 0;$$

sous forme paramétrique par

$$x = f(t; a), \qquad y = g(t; a);$$

ou par

$$x = f(t; a), \qquad y = g(t; a), \qquad z = h(t; a).$$

Les *familles de surfaces* se représentent par

$$f(x, y, z; a) = 0$$

ou, sous forme paramétrique, par

$$x = \varphi(u, v; a), \qquad y = \chi(u, v; a), \qquad z = \psi(u, v; a).$$

312. Comme nous l'avons dit, on peut prendre pour *élément géométrique*, soit la droite, soit le plan.

Si l'on représente : en géométrie plane, la droite par l'équation

$$px + qy = 1;$$

en géométrie de l'espace, le plan par l'équation

$$px + qy + rz = 1,$$

les coefficients $p$ et $q$ de la première sont les *coordonnées de la droite;* les coefficients $p$, $q$, $r$ de la seconde sont les *coordonnées du plan.*

Toute ligne plane peut être regardée soit comme la *trajectoire* d'un point, soit comme l'*enveloppe* d'une droite. L'équation

$$f(x, y) = 0,$$

qui exprime que le point $(x, y)$ appartient constamment à la ligne, en est l'équation *ponctuelle;* l'équation

$$g(p, q) = 0,$$

qui exprime que la droite $(p, q)$ est constamment tangente à la ligne, en est l'équation *tangentielle.*

De même, si l'on désigne par $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point, et par $p$, $q$, $r$ celles d'un plan, les équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(p, q, r) = 0$$

représentent respectivement la surface *lieu* de ce point et la surface *enveloppe* de ce plan.

313. Les lignes usuelles, les surfaces usuelles possèdent chacune un nom : ellipse, cissoïde, strophoïde, hyperboloïde, paraboloïde, tore, etc., etc. Ce nom n'est qu'un *signe* abrégé destiné à remplacer la *définition,* ordinairement trop longue, de la courbe ou de la surface.

L'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

celle du paraboloïde hyperbolique

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$$

peuvent être regardées comme étant cette *définition* même. L'équation, soit d'une courbe plane, soit d'une surface, joue donc un double rôle : elle en est le *signe*, et elle en est la *définition*. Lorsque je dis : soit la courbe

$$y^5 - ax(x^3 + y^3) = 0,$$

je nomme la courbe que je considère et je la définis. On pourrait dire aussi que je la représente par un signe écrit qui en contient implicitement toutes les propriétés. Il en est de même quand je représente, par des équations entre les coordonnées, soit une ligne gauche, soit une surface. Ces équations sont des signes très bons, mais qui ont en général cet inconvénient grave d'être trop longs et trop compliqués.

**314.** On considère souvent, outre les lignes et les surfaces, des ensembles d'éléments qui en contiennent chacun une infinité multiple. Tels sont les *complexes* et les *congruences* de droites. Un complexe est l'ensemble des droites de l'espace dont les 4 paramètres satisfont à une relation donnée; une congruence, l'ensemble de celles où ils satisfont à 2 pareilles relations. Si l'on représente les droites par les équations générales si usitées

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

il suffit d'écrire la relation unique, ou les deux relations entre les 4 paramètres $a$, $b$, $p$, $q$ pour achever de définir le complexe ou la congruence.

### Hyperespaces.

**315.** Nous ne connaissons que trois sortes d'espaces ou d'étendues : l'espace à *une* dimension, c'est-à-dire la *ligne;* l'espace à *deux* dimensions, c'est-à-dire la *surface;* l'espace à *trois* dimensions,

c'est-à-dire le *volume*. Nos sens ne nous donnent nulle perception d'un ordre plus élevé.

On a imaginé cependant de considérer des espaces à 4, à 5, à 6, ... dimensions. De même que, dans les espaces à 1, 2 ou 3 dimensions, il nous faut, pour déterminer un point, 1, 2 ou 3 coordonnées; dans les espaces à 4, 5, 6, ... dimensions, il nous en faudra 4, 5, 6, .... Ces nouveaux espaces sont les espaces supérieurs ou *hyperespaces*. Certains peuvent croire à leur réalité objective et, par conséquent, à la réalité objective de la géométrie à $n$ dimensions. Pour nous, qui n'y croyons nullement, ces conceptions ne laissent point que d'avoir leur utilité. Elles permettent à l'algébriste de donner à certains faits généraux, purement analytiques, des énoncés *géométriques*, des énoncés en quelque sorte *pittoresques*.

316. L'équation à 2 variables

$$x^2 + y^2 = r^2$$

représente le cercle dans le plan ou, si l'on veut, la sphère dans l'espace à 2 dimensions; — l'équation à 3 variables

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

représente la sphère proprement dite, la sphère dans l'espace à 3 dimensions; — l'équation à 4 variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = r^2$$

représentera la sphère dans l'espace à 4 dimensions; — et ainsi de suite. Ces équations toutes de même forme, et qui ne diffèrent que par le nombre des variables, doivent à cette grande ressemblance de posséder un certain nombre de propriétés analytiques communes, constituant chacune un *théorème analytique* très général. La considération des hyperespaces permet de donner à ces théorèmes analytiques des *énoncés géométriques*, de leur faire, par conséquent, exprimer les propriétés générales communes à toutes les sphères.

317. Abstraction faite des ensembles analogues à ceux dont nous avons parlé plus haut, il n'existe dans le plan, c'est-à-dire

dans l'espace à 2 dimensions, qu'*un seul* être géométrique : la *ligne*. Dans l'espace proprement dit, c'est-à-dire dans l'espace à 3 dimensions, il en existe deux : la *ligne* et la *surface*. Dans l'espace à 4 dimensions, il en existera trois : la *ligne*, la *surface*, le *volume*. Dans l'espace à 5 dimensions il en existera quatre; dans l'espace à 6 dimensions, cinq; et ainsi de suite.

### Représentation intrinsèque des courbes.

318. Une *imperfection* de la Géométrie analytique proprement dite, c'est de mêler dans les équations ce qui dépend de la nature de la ligne ou de la surface, et ce qui dépend de la position des axes ou, plus généralement, de la position des *bases fixes* de coordonnées. On a imaginé des systèmes de représentation analytique où ces bases fixes n'existent plus. Le plus simple d'entre eux est le système de représentation *intrinsèque* des courbes, où l'on ne considère que des éléments pris sur les courbes elles-mêmes : l'arc, la courbure, la torsion.

Ce mode de représentation ne suppose aucunes coordonnées et représente les courbes abstraction faite de leur position soit sur le plan, soit dans l'espace. Toute courbe plane s'y détermine par la relation qui fait connaître la courbure en l'un quelconque de ses points en fonction de l'arc aboutissant en ce point; la longueur de l'arc se désigne ordinairement par $s$; le rayon de courbure par R et, par suite, la courbure par $\frac{1}{R}$; l'*équation intrinsèque* est donc

$$\frac{1}{R} = \varphi(s).$$

Les lignes gauches s'y représentent par les relations qui font connaître, en fonction de l'arc aboutissant en un point quelconque, la courbure et la torsion en ce point; cet arc se nomme toujours $s$; le rayon de courbure et le rayon de torsion se désignent respectivement par R et T; la courbure et la torsion sont $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$; les *équations intrinsèques* de la courbe s'écrivent

$$\frac{1}{R} = \varphi(s), \qquad \frac{1}{T} = \psi(s).$$

319. Pour construire sur le plan ou dans l'espace la courbe représentée par son équation ou ses équations intrinsèques, on peut se donner à volonté : le *point* de la courbe que l'on prend pour origine des arcs, la direction de la *tangente* en ce point et, s'il y a lieu, la position du *plan osculateur*. De là une multiple infinité de courbes. Ces courbes ne diffèrent entre elles que par leur position dans l'espace : elles sont toutes identiques de forme, toutes *superposables*.

### Géométries analytiques sans coordonnées.

320. Les autres modes de représentation, indépendants des coordonnées proprement dites, me semblent reposer tous sur la considération des quantités complexes, des quantités dirigées, des vecteurs.

321. La *théorie des équipollences,* due à Bellavitis, prend pour élément géométrique le *vecteur* même, c'est-à-dire le segment de droite considéré en grandeur, direction et sens. Le vecteur se distingue du segment en ce que sa position n'est pas déterminée. Le vecteur AB a pour origine A, pour extrémité B. Il se représente par *vecteur* AB, ou *vect.* AB. Sa grandeur, abstraction faite de sa direction, se représente souvent par AB, ou par *gr.* AB. Des vecteurs en nombre quelconque se peuvent désigner par $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Sur le dessin, on représente le vecteur par un segment de droite que l'on termine en pointe de flèche pour en indiquer le sens. L'inclinaison du vecteur AB sur une droite fixe prise arbitrairement se désigne par *incl.* AB. Deux vecteurs sont *équipollents* lorsque, ayant même grandeur, direction et sens, ils peuvent se remplacer l'un l'autre. Nous avons déjà dit que cette théorie des équipollences comprend un signe particulier de relation, qui n'est autre que le signe astronomique de la Balance. Elle nous offre, en outre, un caractère particulier, qui a été imaginé par Bellavitis et nommé par lui *ramuno :* il équivaut à notre symbole $i$, c'est-à-dire à $\sqrt{-1}$.

322. La considération des vecteurs conduit d'ailleurs à différentes notions nouvelles : celle du *produit géométrique* de deux

vecteurs; celle du *bivecteur;* celle de l'*index* du bivecteur. Ces trois quantités se représentent respectivement par

$$\pi(a, b), \qquad [a, b], \qquad |[a, b].$$

**323.** On pourrait dire que la théorie des *quaternions* n'est que la théorie des *équipollences* étendue à l'espace. Un quaternion est une quantité dirigée, dans l'espace à trois dimensions. Le quaternion A se représente par l'expression

$$a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3,$$

où $a_0$ est une partie numérique et où $i, j, k$ sont des *clés*. Les quaternions possèdent un algorithme qui leur est propre. Quant aux clés, on les a imaginées pour généraliser la notion des quantités complexes ou dirigées.

**324.** L'idée d'un *calcul géométrique,* c'est-à-dire d'une suite d'opérations s'effectuant sur des éléments géométriques, remonte à Leibniz; mais elle ne s'est développée qu'en s'appuyant sur celle des quantités complexes ou dirigées. Ces quantités tirent, d'ailleurs, leur origine de la représentation géométrique des imaginaires, dont le premier inventeur paraît avoir été le Danois Wessel. Cette représentation peut s'effectuer de différentes manières, de telle sorte que les quantités complexes peuvent affecter plusieurs formes. Les études qui en ont été faites successivement par Cauchy, Möbius, Bellavitis, Hamilton, Grassman [1], nous ont conduits à de grands corps de doctrine : *théorie des fonctions, équipollences, quaternions, ausdehnungs lehre,* etc., etc. De plus, elles nous ont conduits à une sorte de *calcul graphique* relatif aux quantités dirigées, et ce calcul nous a donné lui-même plusieurs systèmes de Géométrie analytique, fort différents des systèmes usuels. Ces systèmes nouveaux présentent sur les anciens deux avantages très grands : celui de n'employer aucunes coordonnées; celui d'opérer directement sur les éléments géométriques des figures.

---

[1] Möbius, 1790-1868; Grassmann, 1809-1877.

# CHAPITRE XI.

## MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

### Stéréotomie et charpente.

325. La *stéréotomie* est l'art de tailler les corps solides. Elle se compose de deux parties principales : la coupe des bois ou charpente; la coupe des pierres ou stéréotomie proprement dite.

Dans l'une et dans l'autre, la pièce à tailler, pierre ou bois, se représente par les procédés de la Géométrie descriptive. Les pièces elles-mêmes, ainsi que leurs différentes parties, se désignent par des lettres majuscules : la pièce A, la pièce B. Les points se désignent, en général, par des chiffres, qui peuvent être accentués : le point 1, le point 2′. Les segments de droite, par deux chiffres : le segment qui va du point 1 au point 2 se désigne par 1-2, ou même par $\overline{1\text{-}2}$, l'espèce de trait d'union placé entre les deux chiffres empêchant de confondre le segment 1-2 avec le nombre 12.

Dans la coupe des bois, on désigne souvent par 1′, 2′, 3′, ... les points correspondant aux points désignés par 1, 2, 3, .... Dans les questions d'assemblage, par exemple, on considère les lignes 1-1′, 2-2′, 3-3′, .... D'ailleurs, sur les pièces de bois elles-mêmes, pour indiquer les parties qui se doivent correspondre, les charpentiers se servent de signes particuliers, les mêmes pour toute la France, qui ne sont que les chiffres romains plus ou moins modifiés.

### Édifices, meubles, machines, ....

326. Pour donner une idée générale d'un édifice, on le représente en *perspective*. Pour permettre de le construire, et en faire connaître exactement tous les détails, on en dessine ce qu'on

appelle le *plan*, l'*élévation* et la *coupe*, c'est-à-dire les projections orthogonales sur des plans rectangulaires deux à deux.

Le plan proprement dit, ou *géométral*, c'est la projection orthogonale sur un plan horizontal; l'*élévation*, c'est la projection sur un plan parallèle à la façade principale; la *coupe*, c'est la projection sur un plan parallèle aux façades latérales. On donne, en général, un plan par étage; on donne aussi, selon le besoin, plusieurs coupes, les unes transversales, les autres longitudinales.

327. On procède à très peu près de la même manière pour la représentation des meubles, pour celle des voitures, pour celle des navires, des machines, des instruments ou appareils de la Physique et de la Chimie.

328. Les dessins ainsi définis se tracent soit en noir sur blanc, soit en blanc sur noir ou bleu. Lorsqu'on dispose d'une place suffisante, et qu'il n'en résulte aucune surcharge, on écrit en toutes lettres le nom de chaque partie sur cette partie elle-même. C'est ce qu'on fait en particulier dans les plans des maisons, où l'on écrit ainsi, aux places convenables, les mots salon, galerie, fumoir. Mais, lorsqu'on ne dispose point d'une étendue suffisante, on se contente de marquer, sur chaque partie, une lettre ordinairement majuscule, ou un nombre écrit soit en chiffres arabes, soit en chiffres romains. Ces lettres ou nombres sont alors reproduits au bord ou au coin du dessin et y sont accompagnés de l'indication *in extenso* de leurs significations respectives. Le Tableau de ces indications porte le nom de *légende*. Très souvent il se scinde en plusieurs Tableaux plus petits. C'est tout à fait de la même manière que s'indiquent, sur le dessin, les différentes parties, roues, arbres, pignons, vis, lunettes, ..., dont se composent les machines et appareils.

D'ailleurs, lorsque les édifices ou machines représentés nous offrent des parties similaires, c'est assez l'usage de les marquer toutes d'une même lettre ou d'un même nombre. Sur un plan de maison, on indique, par exemple, toutes les chambres à coucher par la même lettre C. Dans un dessin de pompe à incendie que j'ai en ce moment sous les yeux, les deux extrémités du balancier sont marquées D, D; les deux barres qui leur correspondent, F, F; les deux corps de pompe, P, P.

### Géométrie cotée.

329. La *Géométrie cotée* est une sorte de géométrie descriptive où l'on n'emploie qu'un plan de projection. On y projette tout, orthogonalement, sur ce plan unique, qui est le plus souvent horizontal et que, pour cette raison, l'on nomme toujours le plan horizontal.

330. Un point A se représente par sa *projection a* et par sa *cote* A*a* : cette cote s'écrit en chiffres à côté de cette projection.

Une *droite*, non perpendiculaire au plan de projection, s'y projette suivant une droite : on la désigne par les projections cotées de deux de ses points; on écrit *proj*. PQ, *cote* P, *cote* Q.

Un *plan* se détermine par trois points; ou par une droite et un point; ou par deux droites parallèles. On le nomme à l'aide de ces éléments.

331. On appelle *pente* d'une droite AB, et l'on désigne par pente AB, la tangente trigonométrique de l'angle que cette droite fait avec le plan de projection.

Les *parallèles* à ce plan se nomment des *horizontales*. Tous les points d'une horizontale quelconque possèdent la même cote; aussi dit-on qu'ils sont de niveau, aussi suffit-il d'écrire la cote d'un seul d'entre eux.

On représente souvent un plan par sa *ligne de plus grande pente* ou, comme on dit, par son *échelle de pente*, qu'on figure en général par une droite double portant des points équidistants. Ces points ayant des cotes en progression arithmétique, il suffit d'écrire celles de deux d'entre eux. Les perpendiculaires à la ligne de plus grande pente d'un plan sont, d'ailleurs, les *horizontales de ce plan*.

### Topographie.

332. La *Topographie* est l'art de représenter le terrain; elle se compose de deux parties : le *lever des plans;* le *nivellement*.

Le *lever des plans* se nomme aussi *planimétrie*. Il a pour objet

la construction du plan proprement dit du terrain, c'est-à-dire de la projection orthogonale du terrain sur un plan horizontal. Il s'effectue par des procédés variés : lever à la chaîne, à la planchette, à la boussole; triangulation; etc., etc. Si le terrain était horizontal et plan, cette projection en serait l'image exacte.

Mais il en est rarement ainsi : le plus souvent le terrain est accidenté. Pour en bien déterminer la forme, on a recours alors aux procédés du *nivellement*, lesquels consistent à mesurer la hauteur verticale ou *cote* de chaque point du terrain au-dessus d'un même plan horizontal dit *plan de comparaison*. Les différents points se représentent alors, comme dans la géométrie cotée, par leurs projections accompagnées de leurs cotes : le point A du terrain est représenté par sa projection $a$ et la valeur numérique de sa cote A$a$. La cote se nomme aussi *altitude*.

333. Pour bien marquer sur le dessin le relief du terrain qu'on représente, il existe deux procédés : celui des *courbes de niveau;* celui des *hachures*.

Les *courbes de niveau* sont les courbes constituées sur le terrain par les points ayant une cote donnée. On représente ces lignes par leurs projections et par leur cote, écrite en chiffres à côté de quelques-uns de leurs points. On marque, en général, les courbes de niveau correspondant à des altitudes en progression arithmétique, par exemple de $10^m$ en $10^m$. Plus sur le dessin ces courbes sont rapprochées les unes des autres, plus le terrain est abrupt.

Les *hachures* sont des lignes de plus grande pente. Elles vont d'une ligne de niveau à la suivante. Elles sont d'autant plus épaisses et d'autant plus serrées que leur longueur est moindre. Lorsqu'elles ont une épaisseur constante, on leur donne souvent un écartement égal au quart de leur longueur. Il suit de là que les hachures produisent sur le dessin une teinte d'autant plus foncée que l'escarpement est plus grand.

334. Ce dessin se nomme, en général, *plan topographique*. On dit le plan d'un domaine, d'une ville, d'une commune. Lorsque le terrain a une vaste étendue, le plan topographique devient une *carte topographique :* on dit la carte d'un canton, d'un arrondissement, d'un département.

Dans tous les cas, la carte ainsi construite est une représentation fidèle du terrain. Elle en est une représentation réduite. Le rapport de réduction adopté se nomme l'*échelle*. Dans la Carte de l'État-Major, l'échelle est $\frac{1}{80000}$ : une longueur de $80^m$ y est représentée par une longueur de $1^{mm}$.

Toute carte un peu détaillée présente une multitude d'indications : bois, vignes, marais, ...; cours d'eau, routes, chemins de fer, .... Sur la Carte de l'État-Major, les limites administratives des départements, cantons, communes, ..., sont marquées par des traits divers; les châteaux, fermes, puits, usines, télégraphes, ..., par des signes conventionnels, accompagnés parfois d'abréviations écrites. La plupart des écritures sont parallèles au côté horizontal du cadre; les noms des villes, bourgs, communes sont écrits en lettres romaines, de hauteur variable.

335. A l'aide du plan topographique d'un terrain, on peut construire, en plâtre par exemple, un relief représentant ce terrain lui-même. Ce relief s'appelle souvent *surface topographique;* il correspond évidemment à une équation de la forme $z = f(x, y)$, c'est-à-dire à une Table à double entrée. Dans le cas particulier de l'équation $z = xy$, cette Table n'est autre que la Table de multiplication.

### Géodésie.

336. La *Géodésie* étudie la forme et la grandeur de la Terre. Elle donne les moyens de représenter les terrains d'une étendue très considérable : provinces, royaumes, continents; les représentations qu'elle en fournit sont les *cartes géographiques* ou cartes proprement dites; la carte de la surface entière de la Terre se nomme, suivant les cas, *mappemonde* ou *planisphère*.

La Géodésie diffère surtout de la Topographie en ce qu'elle tient compte de la *sphéricité* ou plutôt de la forme exacte de la Terre. Dans une première approximation, elle suppose celle-ci réduite à une surface idéale, qui serait celle du niveau des mers, si ces mers communiquaient toutes entre elles. Pour marquer le relief, elle mesure l'altitude de chaque point, c'est-à-dire la hauteur de ce point au-dessus de cette surface idéale.

337. Une portion de surface sphérique ne peut jamais se développer sur un plan sans se déchirer ni se plisser. Il est donc impossible qu'une carte plane représente d'une façon parfaite une portion étendue de la surface du globe. Quelques procédés qu'on emploie pour la construire, les contours ou les aires relatives seront plus ou moins altérés. Ces procédés, d'ailleurs assez nombreux, sont ce qu'on appelle les *systèmes de projection*.

Ce sont principalement : la projection *orthographique* sur un méridien, employée pour les Cartes de la Lune ; la projection *stéréographique,* qui n'est qu'une perspective, et où les angles se conservent; la projection *homalographique* de Babinet, qui n'altère point le rapport des aires; la projection *conique* ou *cylindrique* de Flamsteed, dont on s'est servi dans la Carte de France. Pour les cartes marines, on a recours à la projection de Mercator [1], où les formes et les grandeurs relatives sont extrêmement altérées, mais où les méridiens possèdent cette propriété précieuse d'être représentés par des droites parallèles. En certaines études de Géologie, on projette la surface de la sphère terrestre sur les faces d'un polyèdre régulier circonscrit, par exemple sur les faces d'un dodécaèdre pentagonal : tout grand cercle s'y projette suivant une ligne droite.

Le seul mode de représentation absolument exact est celui où le dessin est tracé sur une sphère et non pas sur un plan. C'est ce qui a lieu pour les globes terrestres.

338. Dans la construction d'une carte géographique, la première opération à effectuer, c'est de tracer sur le papier les méridiens et les parallèles. On y marque ensuite, d'après leurs latitudes et longitudes, les différents points du globe. Il est bien clair que des points suffisamment rapprochés permettent de tracer le contour des continents et des îles, le cours des fleuves, les chaînes de montagnes, les limites des empires, etc., etc.

Les nombres de degrés correspondant aux méridiens et parallèles s'écrivent, en général, sur le cadre de la carte. Le sens où ces nombres varient permet de distinguer les latitudes australes des boréales; les longitudes orientales des occidentales. Sur un globe,

---

[1] Flamsteed, 1646-1719; Mercator, 1512-1594.

les numéros correspondant aux méridiens se placent le long de l'équateur; ceux qui correspondent aux parallèles se placent le long d'un méridien. Sur toutes les cartes géographiques, les noms s'écrivent, en caractères plus ou moins grands : ceux des villes, parallèlement au cadre de la carte; ceux des fleuves, le long de leur cours; ceux des pays, dans le sens de leur plus grande dimension.

339. C'est un usage très ancien de tracer un trait colorié le long des frontières d'un royaume, mais à l'intérieur de ces frontières. Il se trouve alors que tout le long de la même frontière se côtoient deux traits de couleurs différentes. Présentement, on couvre l'étendue entière de chaque pays d'une couleur uniforme ou *teinte plate*. A chaque pays correspond une teinte particulière. Chose remarquable, pour qu'il ne se produise jamais de confusion, il suffit de *quatre* couleurs.

On emploie, d'ailleurs, ces teintes plates, non seulement dans les cartes politiques, mais dans les cartes économiques; dans les cartes ethnographiques; etc., etc. Il est bon alors d'indiquer, sur une légende, la signification conventionnelle de chaque teinte.

## Astronomie.

340. En dehors des signes mathématiques dont elle fait un continuel usage, l'Astronomie possède des signes qui lui sont propres, qui remontent parfois à la plus haute antiquité, et qui nous ont été conservés précieusement par les astronomes et les astrologues. Tels sont les signes des *constellations*, ceux du *zodiaque*, ceux des *planètes*, etc., etc.

Pour décrire l'aspect du Ciel, on suppose tous les astres placés à la surface de la *sphère céleste*, c'est-à-dire d'une sphère fictive, de rayon très grand, ayant pour centre l'œil de l'observateur. La place qu'on y attribue à chacun d'eux est le point où cette surface est percée par le rayon dont le prolongement passe par l'astre. Si l'on désigne les astres eux-mêmes par A, B, C, ..., on désignera par $a$, $b$, $c$, ... les points qui leur correspondent ainsi sur la sphère.

On construit des *globes célestes* pleins ou creux et aussi des

*cartes célestes,* analogues aux globes et aux cartes géographiques. On y marque chaque astre d'après ses coordonnées célestes. L'astre se figure tantôt en noir sur un fond blanc, tantôt en blanc sur un fond bleu ou noir.

341. Les étoiles forment sur la sphère céleste des groupes d'aspects très variés qu'on nomme *constellations*. Les anciens ont supposé tracée, sur chaque constellation, une figure qui lui donne son nom, mais qui n'en rappelle nullement la forme. Telles sont *Orion,* la *Grande Ourse,* la *Petite Ourse,* le *Taureau,* la *Baleine.* Les étoiles d'une même constellation se désignent, dans l'ordre d'éclat décroissant, par des lettres grecques, des lettres romaines ou des numéros : $\mu$ de la Baleine, U d'Orion, la 61$^{e}$ du Cygne. On donne parfois aux lettres des indices placés comme des exposants : $\delta^1$ et $\delta^2$ du Taureau. Les étoiles les plus remarquables se nomment *étoiles fondamentales.* Il y aurait 382 étoiles fondamentales, dont 22 circumpolaires.

342. Le *zodiaque* est une zone de la sphère céleste qui s'étend de part et d'autre de l'écliptique, tout le long de ce grand cercle. On le suppose divisé en 12 parties égales qui correspondaient, à l'époque de l'invention du zodiaque, aux 12 constellations zodiacales. Ces constellations ont les noms et signes que voici :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bélier | ♈, | Lion | ♌, | Sagittaire | ♐. |
| Taureau | ♉, | Vierge | ♍, | Capricorne | ♑. |
| Gémeaux | ♊, | Balance | ♎, | Verseau | ♒. |
| Cancer | ♋. | Scorpion | ♏, | Poissons | ♓ |

L'*origine* des ascensions droites se désigne par la lettre $\gamma$, qui ressemble fort au signe du *Bélier.*

343. Le Soleil et la Lune se représentent respectivement par les signes ☉ et ☾; Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, par les signes

☿, ♀, ♁, ♂, ♃, ♄, ♅, ♆.

Tous ces signes peuvent entrer dans le corps même des équations.

Les petites planètes, dont le nombre atteint plusieurs centaines, possèdent chacune un numéro et un nom : Pallas (2), Junon (3), ....

Ces noms sont tous tirés de la mythologie. Il en est de même des noms, Deimus et Phobus, des deux satellites de Mars.

344. Les nombres qui figurent dans l'étude des astres, ceux qui en sont, comme on dit, les éléments, se représentent par des notations spéciales. Les longitudes des nœuds *ascendant* et *descendant* se désignent respectivement par ☊ et ☋. Dans l'étude des satellites, L représente la longitude moyenne du satellite; $\omega$ l'angle compris entre la ligne des nœuds et la ligne des apsides; $i$ l'inclinaison, $e$ l'excentricité, $a$ le demi-grand axe de l'orbite; T la durée de la révolution sidérale; $m$ la masse du satellite. Dans le Tableau des comètes paru dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* de 1889, T représente l'époque du passage au périhélie en temps moyen de Paris; $E_p$ l'époque de l'osculation; M l'anomalie moyenne; $\log q$ le logarithme de la distance périhélie; $e$ l'excentricité; $E_q$ l'équinoxe moyen; $\mu$ le moyen mouvement diurne; etc., etc.

345. Le *calendrier,* évidemment, se rattache à l'Astronomie. Il présente beaucoup de noms; mais peu de signes graphiques particuliers. On y peut citer cependant les majuscules G, F, E, D, C, B, A, prises en sens inverse de l'ordre alphabétique, qu'on nomme les *lettres dominicales*. On y peut citer aussi la fraction dont se servent les Russes pour indiquer à la fois les dates dans le *calendrier julien* et dans le *calendrier grégorien :* ils écrivent, par exemple, $\frac{\text{19 février}}{\text{5 mars}}$ 1861. C'est toujours la date placée en numérateur qui appartient au calendrier julien.

## Mécanique.

346. Parmi les phénomènes qu'étudie la Mécanique, le plus simple est le *mouvement* d'un point matériel. On désigne ce point par M, et ses coordonnées, à l'instant où on le considère, par les lettres $x$, $y$, $z$.

L'*instant* est pour les durées ce que le point est pour les longueurs. Un instant est parfaitement déterminé quand on connaît le temps $t$ qui s'est écoulé depuis l'instant pris pour origine jusqu'à l'instant considéré. Lorsqu'on donne $x$, $y$, $z$ en fonction de $t$, le

mouvement du point est complètement connu, et les équations qui expriment $x$, $y$, $z$ constituent une représentation paramétrique de la trajectoire. Il est, d'ailleurs, évident qu'il faut trois équations de ce genre lorsque le point se meut d'une manière quelconque; qu'il n'en faut plus que deux lorsqu'il se meut sur un plan; et qu'une seule, quand il décrit une droite.

347. La position du point mobile sur sa trajectoire peut se déterminer sans coordonnées. C'est ce qui a lieu quand on fait connaître l'arc positif ou négatif de cette trajectoire qui va d'une origine fixe donnée à la position du mobile. La *longueur* de cet arc s'appelle d'ordinaire l'*espace*, et se désigne par $e$. La relation $e = f(t)$ est la *loi des espaces*. Les relations

$$e = a + bt, \qquad e = a + bt + ct^2$$

sont respectivement les lois des espaces dans le mouvement *uniforme* et dans le mouvement *uniformément accéléré*.

On désigne parfois par $x_t$, $y_t$, $z_t$ et $e_t$ les valeurs numériques, à l'instant $t$, des coordonnées et de l'espace parcouru. L'équation

$$e_t = \frac{1}{2} \varpi t^2$$

est alors la *loi des espaces* dans la chute, sans vitesse initiale, d'un point pesant dans le vide.

348. De la comparaison des espaces parcourus et des temps employés à les parcourir naît la notion de *vitesse;* de celle-ci, et par des considérations analogues, la notion d'*accélération*. La vitesse se représente d'ordinaire par $v$; l'accélération par $w$ ou $\gamma$. L'accélération due à la pesanteur se désigne presque toujours par $g$.

La vitesse et l'accélération sont des quantités ayant chacune grandeur, direction et sens. Il est commode de les représenter par des *vecteurs*. C'est, d'ailleurs, comme les vecteurs qu'elles se composent et se décomposent. Les *composantes* de la vitesse $v$ suivant les axes se désignent souvent par $v_x$, $v_y$, $v_z$; celles de l'accélération, par $w_x$, $w_y$, $w_z$. On décompose aussi l'accélération en deux composantes dirigées, l'une suivant la tangente à la courbe, l'autre

suivant la normale principale. On désigne ces deux composantes par les notations $w_t$ et $w_n$. Quant à ce qu'on appelle la vitesse *aréolaire*, on la désigne d'ordinaire par $v_a$.

349. L'étude du *mouvement des corps solides* se ramène à celle des *translations* et des *rotations*, lesquelles, se représentant aussi par des vecteurs, peuvent se composer et se décomposer. Le mouvement d'un point et le mouvement d'un corps solide, lorsqu'on fait abstraction des causes qui les produisent ou les modifient, constituent le double objet de la *Cinématique*.

La *Statique* et la *Dynamique*, les deux autres parties de la Mécanique, supposent deux notions nouvelles, qui se définissent pour ainsi dire l'une par l'autre : la notion de *force*, la notion de *masse*. La masse se représente par M, $m$ ou $\mu$. La force, par F, $f$, P.

La force possède point d'application, direction, intensité. On la représente par un vecteur ayant pour origine le point d'application; pour direction, la direction même de la force; pour grandeur, l'intensité. On suppose toujours que la force tire et l'on termine en flèche le vecteur qui la représente. Les coordonnées du point d'application se désignent par $x$, $y$, $z$; les composantes de la force parallèlement aux axes, par X, Y, Z. Plusieurs forces considérées simultanément se représentent par $F_1$, $F_2$, ...; les coordonnées de leurs points d'application par $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, ...; leurs composantes par $X_1\, Y_1\, Z_1$, $X_2\, Y_2\, Z_2$, .... Si elles ont une résultante unique, on représente : cette résultante par F; les coordonnées de son point d'application par $x$, $y$, $z$; ses composantes suivant les axes par X, Y, Z. Un système de forces agissant en même temps sur un solide se désigne souvent par S.

350. Toutes les *forces* appliquées à *un même point* peuvent se réduire à *une seule*. Toutes les forces appliquées à un même *corps solide* peuvent se réduire à *deux*, ou bien à une *force* et à un *couple*. Le *couple* n'est qu'un groupe de deux forces, égales, parallèles, de sens contraires, mais non directement opposées. Les couples se représentent aussi par des vecteurs; ils peuvent se composer, se décomposer et, quel que soit leur nombre, se réduire à un seul. Le couple formé par les deux forces P et — P se représente par (P, — P). Les deux résultantes $R_1$, $R_2$ auxquelles se réduit un

système quelconque de forces constituent un système nouveau, qui se représente par $(R_1, R_2)$.

Tout vecteur possède un *moment* par rapport à un *point*, par rapport à un *axe*, par rapport à un *plan*. Il en est ainsi de toute force. Le moment d'une force par rapport à l'origine se note $M_0$; les moments par rapport aux trois axes se notent respectivement $M_{0x}$, $M_{0y}$, $M_{0z}$. On représente parfois le premier par G; les trois derniers par L, M, N.

351. La Mécanique rationnelle comprend encore quelques autres notions : celles du *travail*, de la *force vive*, des *surfaces de niveau*, ...; celle aussi du *centre de gravité*. Le travail se représente par T : on distingue le travail moteur $T_m$ et le travail résistant $T_r$. La force vive est $\frac{1}{2} mv^2$, si l'on désigne par $m$ la masse et par $v$ la vitesse. Une surface de niveau se représente, comme toute surface, par une équation en $x$, $y$, $z$, .... Le centre de gravité d'une figure se marque, presque toujours, G ou $g$.

352. Ce qu'il faut remarquer surtout dans la *Mécanique rationnelle*, telle qu'on l'enseigne présentement, c'est l'emploi systématique qu'on y fait des *vecteurs*. Grâce à eux, la Mécanique se ramène tout entière à la théorie des vecteurs et, par conséquent, à une branche unique de la Géométrie.

### Physique, Chimie, Histoire naturelle.

353. La Physique, la Chimie, l'Histoire naturelle représentent leurs instruments et appareils soit d'une façon complète, soit d'une façon abrégée ou, comme on dit, *schématique*. Elles se servent d'ordinaire, dans l'un et l'autre cas, des procédés indiqués plus haut. Depuis quelque temps, elles y ajoutent la Photographie.

Quant aux figures qu'elles emploient, notamment en Optique, pour l'explication des phénomènes, ce sont de véritables *figures de Géométrie;* on les note comme telles : on désigne par F le foyer principal d'un miroir concave; par $f$ un des foyers secondaires; par $ab$ l'image, dans une lunette, de l'objet AB; par OA′ la position du pendule OA, après qu'il a subi une certaine déviation; etc., etc.

Ces mêmes sciences, surtout la Physique, considèrent, nous l'avons vu (95), des *grandeurs* qui leur sont propres, et pour la mesure desquelles elles emploient des *unités particulières*. Ces unités pourraient se classer ainsi : les *unités géométriques*, les *unités cinématiques*, les *unités mécaniques* et, en outre, celles qui se rapportent à la chaleur, à l'électricité, à la lumière. Les questions d'unités sont fort importantes; elles ont fait l'objet d'Ouvrages spéciaux ([1]), et ont été étudiées dans des congrès récents ([2]). Ces grandeurs et unités, d'ailleurs, donnent lieu à des équations d'une espèce particulière, qu'on appelle équations de *dimensions*; et où l'on met toujours les deux membres entre crochets.

354. Dans les problèmes usuels de la Physique, les notations sont en quelque sorte consacrées. On représente un volume par V, un poids par P, une densité par D. Dans la formule qui donne le poids du litre d'air : $t$ désigne la température centigrade; $p$, la pression; L, la latitude; $h$, la hauteur au-dessus du niveau de la mer; R, le rayon de la Terre. Dans les formules barométriques pour le calcul des hauteurs, on représente : à la station inférieure, par H la hauteur du baromètre, par T sa température, par $t$ celle de l'air; à la station supérieure, par $h$, T' et $t'$ respectivement les nouvelles valeurs de ces mêmes quantités.

355. En Chimie, tout *corps simple* se représente par un symbole qui en rappelle le nom et en indique l'*équivalent* ou l'*atome*, c'est-à-dire un certain poids. Tout *corps composé* se désigne par deux ou plusieurs de ces symboles juxtaposés entre eux, ou séparés au plus en deux groupes par une virgule. Lorsque le composé contient deux, trois, quatre atomes ou équivalents d'un certain corps simple, le symbole de ce corps est marqué, à droite et en haut, du nombre 2, 3, 4. Ce nombre occupe ainsi la place d'un exposant, bien qu'il ne soit qu'un coefficient : c'est là un abus sans conséquence, puisque les calculs chimiques ne nous offrent jamais d'exposant véritable, et qui nous permet de juxtaposer les symboles entrant dans la formule du corps composé, d'écrire, par exemple, sous la

---

([1]) Par exemple : GUILLAUME, *Unités et étalons*, 1 vol. in-18. Paris, 1893.
([2]) Congrès de Moscou, de Francfort, etc.

forme $Fe^3O^4$, une formule que les Mathématiques ordinaires écriraient $3Fe + 4O$. La *notation chimique* supprime ainsi le signe $+$ entre les éléments des corps composés, comme l'*Algèbre* supprimait le signe $\times$ entre les facteurs des monomes. Le but est le même : rappeler par l'*unité du signe celle de l'objet* représenté. On sait, d'ailleurs, que la Chimie indique aussi fréquemment la structure intime des corps composés à l'aide de triangles, d'hexagones, même de tétraèdres. Elle se trouve ainsi liée à la Géométrie, comme l'était déjà la Minéralogie ou plutôt la Cristallographie.

356. L'Histoire naturelle ne mesure guère que des poids, des longueurs, des surfaces. Suivant une convention récente, elle ne doit se servir pour ces mesurages que des unités du Système métrique [1]. Elle emploie, d'ailleurs, des formules pour faire connaître les nombres de dents des différents animaux; des notations abrégées pour indiquer le grossissement linéaire ou superficiel des microscopes; mais ces notations ni ces formules ne sont véritablement algébriques. Par contre, elle possède, dans la phyllotaxie, une belle théorie mathématique, qui est due à Bravais.

357. Depuis Descartes, la Physique se rapproche de plus en plus de la Mécanique, à laquelle elle tend à se réduire. Conformément à une prédiction de Berthollet [2], la Chimie suit une voie analogue. Plusieurs tentatives ont été faites récemment pour soumettre au calcul les phénomènes biologiques. On peut le dire d'une manière générale : en Physique, en Chimie, en Histoire naturelle, les considérations mathématiques, les notations mathématiques jouent un rôle dont l'importance va sans cesse en grandissant. C'est là un fait inévitable, nécessaire. Toute science, en effet, à mesure qu'elle avance, s'enrichit de lois numériques de plus en plus nombreuses et précises. Or, rien ne saurait remplacer l'Algèbre pour exprimer de pareilles lois et pour en développer toutes les conséquences.

---

(1) Congrès zoologique de Moscou, août 1892.

(2) Berthollet, né en 1748, mort en 1822.

# CHAPITRE XII.

## SIGNES DE RÉDACTION.

### Divisions d'un Ouvrage ou Mémoire.

358. Tout Ouvrage ou Mémoire de Mathématiques, rédigé avec soin, présente des divisions nombreuses, d'importance variable. Les plus étendues sont les différentes parties de l'Ouvrage. Chaque partie à son tour se partage en livres; chaque livre, en chapitres; chaque chapitre en paragraphes. Une partie, un livre, un chapitre peut aussi se partager en plusieurs sections.

Toutes ces divisions rendent le Livre beaucoup plus clair; elles séparent les matières différentes, montrent où chacune d'elles commence et finit, mettent en évidence l'ordre suivi par l'auteur. Il est bien certain qu'elles doivent être naturelles, c'est-à-dire fondées sur la *nature* des matières traitées et non point seulement sur leur *étendue*. Chacune des plus petites parties, ou paragraphes, doit en particulier avoir son *unité :* c'est ce qui arrive dans les précis de Géométrie divisés en théorèmes.

359. Les portions, d'importance décroissante, en lesquelles l'Ouvrage est partagé sont caractérisées par les vides et les titres, de plus en plus petits, qui les séparent. On laisse, par exemple, une page blanche devant chaque partie; on ne commence un livre que sur une page de droite, c'est-à-dire qu'en *belle page;* on trace un tiret sous la dernière ligne de chaque chapitre; on sépare chaque paragraphe du suivant par un fort interligne. Pour les titres, on les imprime, au milieu de la justification, en grandes capitales, en capitales plus petites, en caractères ronds, etc.; lorsqu'un paragraphe présente un titre, on l'écrit, en caractères gras, au commencement même du texte.

360. Les parties, livres, chapitres et paragraphes sont numérotés, soit en chiffres romains, soit en chiffres arabes : lorsqu'un chapitre présente plusieurs sections, on les distingue souvent par des lettres, majuscules ou minuscules. On numérote les livres dans l'intérieur des parties; les chapitres, dans l'intérieur des livres, de telle façon que l'Ouvrage présente, pour les chapitres comme pour les livres, plusieurs suites de numéros. Les numéros des parties, comme ceux des paragraphes, ne forment au contraire qu'une seule suite, commençant avec l'Ouvrage et finissant avec lui. Le dernier numéro de paragraphe fait connaître alors le nombre des objets distincts considérés dans l'Ouvrage tout entier.

Cet Ouvrage, quel qu'il soit, présente, d'ailleurs, une troisième suite ininterrompue de numéros, allant du commencement à la fin : celle des numéros des pages. Ceux-ci se placent le plus souvent au-dessus du milieu de la ligne de tête; on les y met quelquefois entre parenthèses ou entre tirets. On les place souvent aussi au coin supérieur et extérieur de la page; ou même au-dessous de la ligne du bas. Il faut toujours que leur forme, leur grandeur, leur position les rendent très apparents, très lisibles.

Les Ouvrages de Mathématiques, à la suite de leurs livres et chapitres, présentent parfois des énoncés d'exercices ou de problèmes; ces énoncés sont numérotés d'une manière spéciale, par exemple en chiffres gras, romains ou arabes. Ces chiffres peuvent aussi être accompagnés d'*astérisques* ou de lettres, qui indiquent le degré de difficulté. On marque souvent, d'ailleurs, par un astérisque, les paragraphes qui, à une première lecture, peuvent être passés.

Quant aux avant-propos, préface ou introduction qui précèdent l'Ouvrage proprement dit, les pages s'en marquent souvent en chiffres romains; et les paragraphes, dans bien des cas, peuvent n'en être pas numérotés.

### Tables et titres courants.

361. Pour trouver, dans un Ouvrage quelconque, le paragraphe qu'on cherche, on peut : soit recourir à la *table*, alphabétique ou analytique; soit se servir du *titre courant*, quand il existe et qu'il est bien fait.

362. Les *tables* ordinaires ne sont que des résumés du Livre. Elles en reproduisent, dans leur ordre, toutes les divisions, avec leurs titres plus ou moins grands et les vides d'étendue variable qui les séparent. Chaque paragraphe y possède sa ligne et, dans beaucoup d'Ouvrages de Mathématiques, cette ligne présente : à sa gauche, le numéro du paragraphe; à sa droite, celui de la page où il commence. Il est bon d'indiquer toujours, pour chaque paragraphe, ces deux mêmes numéros. Lorsque l'Ouvrage est fort étendu, on leur en adjoint un troisième, d'ordinaire en chiffres romains, pour indiquer le volume.

363. Le *titre courant* n'est que la ligne, en grandes ou petites capitales, que l'on place au commencement de chaque page. Le titre courant n'existe pas toujours. Quand il existe, mais qu'il reste le même du commencement à la fin de l'Ouvrage, il ne sert absolument à rien. Pour qu'il soit utile, il faut qu'il indique, à chaque instant, l'endroit où l'on se trouve. En certains Ouvrages, on lit en haut des pages : à gauche, le titre du livre; à droite, celui du chapitre; ou bien : à gauche, le titre du chapitre, et à droite, celui du paragraphe. Ce sont là d'excellentes pratiques. Elles permettent, rien qu'à feuilleter l'Ouvrage, d'y trouver ce qu'on y cherche.

### Appels de Notes.

364. Les *notes* au bas des pages s'impriment en caractères plus petits que ceux du texte. Il en est de même des *notes marginales*, jadis si usitées, et aussi, ordinairement, des *notes* rejetées à la fin du Volume.

Le plus souvent, les notes au bas des pages ont pour but d'indiquer le Recueil, l'Ouvrage, le Mémoire auquel on renvoie le lecteur. Ce sont des *notes bibliographiques*. Elles n'ont toute leur utilité que si elles sont complètes et précises. La note renvoyant à un Mémoire paru dans un Recueil devrait toujours indiquer : le titre exact du Mémoire, le nom du Recueil, la série, le volume, l'année, même les numéros de la première et de la dernière page. On remplace quelquefois les noms des Recueils par des abréviations expliquées au commencement de l'Ouvrage. Cette pratique a ses avantages, mais aussi ses inconvénients.

365. Les signes intercalés dans le texte pour renvoyer aux notes qui les reproduisent se nomment *appels de notes*. Ils sont d'espèces variées. Ce sont tantôt des astérisques, des lettrines, des nombres en caractères très petits, placés à la droite du mot auquel ils se rapportent et un peu au-dessus de la ligne du texte; tantôt des croix, des espèces de poignards, etc., etc. Présentement, ces mêmes signes, toujours aussi petits et placés de la même manière, se mettent entre parenthèses, c'est-à-dire entre deux traits courbes qui se regardent. Parfois, on ne trace que le second de ces traits, ce qui produit un effet assez disgracieux.

366. Lorsque les appels de notes sont des numéros, la suite de ces numéros recommence d'ordinaire à chaque page. Quelquefois cependant elle se continue tout le long du chapitre ou même de l'Ouvrage entier. C'est ce qui a lieu dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*. C'est ce qui a lieu aussi lorsque, pour expliquer le texte et en faciliter l'intelligence, une suite systématique de notes court au bas de toutes les pages, et forme ce qu'on appelle un *commentaire perpétuel*.

### Renvoi à un paragraphe.

367. C'est l'usage, avons-nous dit, de numéroter les paragraphes à l'aide d'une suite de numéros allant d'un bout à l'autre de l'Ouvrage ou Mémoire. Le plus grand avantage qu'on y trouve, c'est de pouvoir, à tout instant, *renvoyer* au paragraphe contenant la définition dont on a besoin, ou le théorème sur lequel on s'appuie.

368. Pour renvoyer ainsi le lecteur à tel ou tel *paragraphe*, on indique toujours le *numéro* de ce paragraphe, soit dans le texte, soit sur la marge extérieure.

Dans le texte, on se contente parfois d'écrire le numéro; d'autres fois, on le fait précéder soit du mot *article*, soit du mot *paragraphe*, soit du signe §, qui leur est équivalent; le plus souvent, on emploie l'une quelconque de ces indications, en la mettant entre parenthèses ou entre crochets.

Quand on place le numéro dans la *marge*, c'est toujours sans

parenthèses d'aucune sorte; ce numéro correspond alors à un *astérisque*, marqué dans le texte, et qu'on reproduit ou ne reproduit pas devant le numéro.

### Texte et figures.

369. Comme nous l'avons déjà dit, il existe des Ouvrages de Géométrie où les figures ne sont point marquées (294); mais c'est là un fait encore rare. D'ordinaire, les Ouvrages de cette sorte nous présentent une suite de figures correspondant aux parties successives du texte.

370. Il est évidemment essentiel qu'il existe une concordance parfaite entre la *figure* tracée et le *texte* qui l'explique. Les mêmes lettres doivent se trouver dans l'une et dans l'autre, et s'y trouver dans le même ordre. Il serait mauvais qu'une lettre citée dans celui-ci ne fût point marquée sur celle-là. Quand on parle, par exemple, de l'angle X'OX d'une figure, il faut que ces trois lettres X', O, X y soient marquées.

Il faut aussi que les figures soient d'aplomb, et non point penchées ou renversées; que les lettres n'y soient point retournées; et qu'on voie immédiatement sur le dessin les éléments indiqués dans le texte. Peut-être pourrait-on, dans les cas compliqués, imiter les naturalistes, qui placent la lettre à côté de la figure, et indiquent par un trait pointillé, terminé en flèche, le point de la figure auquel cette lettre correspond.

371. Dans un Ouvrage imprimé, les différentes parties d'une figure se présentent *simultanément;* elles ne sont indiquées, expliquées par le texte que d'une manière *successive*. C'est là un désaccord qui a ses inconvénients, mais qu'on ne peut faire disparaître. Dans l'exposition orale, lorsqu'elle est consciencieuse, ce désaccord n'existe point.

Le professeur sérieux trace les différents éléments de la figure à l'instant même où il en parle; c'est aussi à cet instant qu'il leur donne des noms et les marque de lettres. Il pousse même le soin jusqu'à faire toujours concorder son geste et sa parole. S'il nomme le segment AB, son doigt ne montre point le segment BA; s'il dit

qu'il élève la perpendiculaire PO, sa main n'abaisse point la perpendiculaire OP.

Quant au procédé qui consiste à tracer la figure à l'avance, soit sur le tableau noir, soit sur une grande feuille de papier ou de toile, il n'est excusable que pour les figures très compliquées, qu'on ne peut tracer à main levée, sans instrument.

372. Il serait évidemment mauvais qu'il fallût, à la lecture d'une démonstration difficile, abandonner à chaque instant le texte pour recourir à la figure. Cette suite d'interruptions distrairait l'attention du lecteur et augmenterait sa fatigue. C'est pour cette raison, répétons-le, que certains auteurs, surtout lorsque la figure est compliquée, en suppriment le tracé (294) et se contentent d'en désigner les éléments à l'aide de notations bien choisies. Sans supprimer la figure, on en diminue notablement les inconvénients en la plaçant tout près du texte correspondant ou, comme on dit, dans ce texte. Parfois aussi, le texte couvrant la page de droite, on place la figure en regard sur la page de gauche, qui devient ainsi une véritable planche. Cette dernière pratique est excellente, surtout pour les cahiers des élèves : on ne saurait trop la leur recommander. Mais il n'est pas bon que la figure, lorsqu'elle ne présente point des dimensions trop grandes, fasse partie d'un atlas séparé, ni soit rejetée, sur une planche complémentaire, à la fin du chapitre ou de l'Ouvrage entier.

373. Lorsque la figure est placée dans le texte, sur la page et à l'endroit même où on l'explique, il est inutile de marquer aucun renvoi. Lorsqu'il n'en est point ainsi, on affecte la figure d'un numéro que l'on reproduit, dans le texte, sous cette forme : fig. 3, ou (*fig.* 3). On place parfois cette indication dans la marge, en la rappelant dans le texte par un astérisque.

Il est bien clair que, quand la figure est tracée sur une planche, il faut donner, outre le numéro de la figure, le numéro de la planche. Ce dernier s'écrit d'ordinaire en chiffres romains.

374. Il est à remarquer que, dans les Ouvrages de Science imprimés au XVI^e^ et au XVII^e^ siècle, les figures sont placées dans le texte, comme on peut le vérifier sur les Ouvrages de Salomon de

Caus, de Descartes, de Huygens [1]. C'est au XVIII^e siècle qu'on a pris l'habitude de les rejeter à la fin du Livre, ou même sur un atlas; et cet usage s'est malheureusement perpétué jusqu'à ces dernières années.

### Texte et calculs.

375. Comme nous l'avons dit, dans la plupart des Ouvrages de Mathématiques, chaque page nous offre deux sortes d'écriture : l'*algorithme* de l'Analyse ou de l'Algèbre, pour les équations et les calculs; l'*écriture ordinaire,* pour le discours qui les accompagne. On établit souvent une sorte de correspondance entre les deux parties ainsi écrites. Il arrive même qu'on introduise l'une de ces parties dans l'autre.

376. Lorsqu'une expression, une équation, une formule a besoin d'être rappelée dans le texte, on la fait précéder d'un signe de rappel approprié : chiffre, minuscule grecque, majuscule romaine, soit placé entre parenthèses ou crochets, soit suivi seulement d'une seconde moitié de parenthèse. On affecte parfois ce signe d'un ou plusieurs accents. Quel qu'il soit d'ailleurs, il suffit de l'écrire dans le texte pour rappeler aussitôt l'expression, l'équation, la formule. Ce signe, bien entendu, ne doit pouvoir se confondre avec aucun des signes de renvoi ou d'appel déjà considérés. Les numéros des équations peuvent d'ailleurs former différentes séries, ou n'en former qu'une allant d'un bout à l'autre de l'Ouvrage. Ce dernier cas se présente lorsque l'auteur tient à mettre en évidence les formules importantes, les formules à retenir.

377. On introduit parfois l'algorithme de l'Algèbre ou de l'Analyse au milieu du discours en langage ordinaire. C'est ce qu'on fait lorsque l'on insère, au milieu du texte, un nombre écrit en chiffres, ou une lettre désignant une quantité et écrite, d'ailleurs, en italique, en ronde ou en caractères gras. C'est ce que l'on fait surtout lorsqu'on y écrit une expression ou une équation. Certains écrivent cette expression ou cette équation sur la ligne du texte, sans la

---

[1] Né en 1629, mort en 1695.

séparer aucunement des mots qui la précèdent ou la suivent. Certains même n'hésitent pas à scinder l'expression ou équation en deux parties, placées la première à la fin d'une ligne, la seconde au commencement de la ligne suivante. Ces pratiques sont mauvaises; elles ne se pourraient justifier que si l'on manquait de place pour bien écrire. Quand on écrit bien, on n'enjambe jamais d'une ligne sur l'autre; on met entre parenthèses les expressions qui figurent dans le texte; on consacre une ligne entière à chaque équation, en plaçant celle-ci au milieu de cette ligne.

378. De même qu'on introduit l'algorithme dans le texte, on introduit parfois le langage ordinaire au milieu de l'algorithme. On désigne ainsi une quantité par l'ensemble d'un mot, complet ou abrégé, et d'une lettre de l'alphabet : angle A; trièdre $(O, xyz)$; proj. AB; hyp. $ab$; incl. AB; gr. AB; vol. AOB; val. abs. $(ah + 2ax + b)$. On écrit de même $\partial P$ et $pt P$ pour désigner le degré et le premier terme du polynome P. En un livre très élémentaire, au milieu d'une équation, les signes de la multiplication et de la division sont remplacés respectivement par les locutions *multiplié par* et *divisé par*. En d'autres, très sérieux, toutes les quantités figurant dans les équations sont désignées en langage ordinaire. Je trouve ainsi ces égalités :

$$\text{Vitesse} = \lim \frac{\text{espace parcouru}}{\text{temps employé}} \quad (^1),$$

$$\text{Latitude} = \text{hauteur mér. vraie} + \text{distance polaire} \quad (^2).$$

Cette façon de désigner, au milieu d'un algorithme, une quantité par son nom en langage ordinaire est évidemment mauvaise. A peine serait-elle excusable si cette quantité ne figurait qu'une seule fois dans tout l'Ouvrage ou Mémoire.

### Mots très fréquents.

379. Il est évidemment très naturel, lorsqu'un mot revient à chaque instant, de le représenter dans l'écriture par une abrévia-

(1) BURAT, *Précis de Mécanique*, in-12, Paris, 1869, p. 128.
(2) COLLET, *Navigation astronomique simplifiée*, in-f°, Paris, 1891, p. 3.

tion, par une initiale, par un signe quelconque. Ce signe peut être choisi, à volonté, parmi les signes existants ou en dehors d'eux; l'essentiel, c'est qu'il soit très court et très facile à former. C'est peut-être à ce besoin d'abréger, de simplifier, d'épargner un effort même léger qu'il faut faire remonter la création des *signes algébriques :* signes d'opérations, signes de relations, signes d'objets. L'*Algèbre* ne serait ainsi que l'*invention d'une paresse intelligente.*

380. Les signes d'opération $+$, $-$, $\times$, $:$, ... sont purement *idéographiques.* Ils sont les mêmes dans tous les pays, tandis que les mots et locutions qu'ils remplacent : *plus, moins, multiplié par, divisé par,* varient avec la langue d'un pays à un autre.

Les signes d'égalité, d'équivalence, de congruence; les signes d'inégalité, simples ou doubles, sont tous aussi des signes *idéographiques.* Il existe, pour la similitude des figures, des signes analogues, peu connus et pour ainsi dire inusités. Ce sont les signes

$$x \supset, \quad \frac{x}{\supset},$$

qui sont formés des majuscules S et D couchées sur une ligne horizontale et qui signifient respectivement : *semblable, dissemblable, semblable* ou *dissemblable* (¹). Il est bien clair que ces signes, comme le font ceux d'égalité ou d'inégalité, permettraient d'écrire de véritables propositions.

Quelques professeurs ont imaginé depuis peu de se servir de *flèches : horizontales, montantes* ou *descendantes,* pour remplacer les mots : *tendre, croître* ou *décroître.* Ce sont là encore des signes idéographiques, permettant d'écrire d'une façon claire et rapide des phrases véritables. Les écritures

$$x \rightarrow a, \quad u \nearrow, \quad v \searrow$$

se liraient, en français : *x tend vers a; u croît; v décroît.* J'ai vu un étudiant écrire devant moi, sur le tableau noir, l'ensemble de signes

$$x \quad a < b,$$

qui devait se lire : *x croît de a à b.*

---

(¹) François CALLET, *Tables portatives de logarithmes*, in-8°, Paris, 1795, p. 79.

381. On remplace depuis longtemps dans les manuscrits, et même dans quelques Ouvrages imprimés, les noms de certains objets par des signes qui n'en sont que des images très petites. Je trouve, dans un Ouvrage du XVIII^e siècle (1), les signes

$$\parallel, \quad \angle, \quad \perp,$$

pour les mots *parallèle, angle, perpendiculaire;* les signes

$$\triangle, \quad \llcorner, \quad \square, \quad \bigcirc,$$

pour les mots *triangle, triangle rectangle, carré, cercle;* etc., etc. L'auteur de cet Ouvrage pense du reste que les Mathématiques présentent déjà trop de signes, et qu'il n'en faut inventer de nouveaux que s'il y a, à le faire, nécessité absolue.

Il est à remarquer, d'ailleurs, que, dans quelques Mémoires (2) sur la théorie des nombres, on représente un *carré parfait* par $\square$; et par $\triangle$, un *nombre triangulaire*.

382. Les mots qui reviennent sans cesse dans les raisonnements, qui pour ainsi parler les encadrent, *or, donc, car, puisque,* ..., pourraient être remplacés chacun par un signe. Peut-être en serait-il de même des locutions *parce que, pourvu que, quoique,* etc., etc., que l'on a nommées *groupes articulés* (3). On connaît les abréviations : Q. E. D., pour *quod erat demonstratum;* C. Q. F. D., pour *ce qu'il fallait démontrer*. Plusieurs Ouvrages anglais, les uns anciens, les autres récents (4), représentent par $\because$, ou par $\therefore$, l'équivalent anglais de notre mot français *donc*.

## Pasigraphie mathématique.

383. Les signes *idéographiques* ont des avantages et des inconvénients. Ils sont plus brefs que les signes phonétiques, ils sont

(1) SAVERIEN, *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique,* in-4°, Paris, 1753, t. I, p. 125.

(2) LIOUVILLE ou BESGE, *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* in-4°, Paris, vers 1860.

(3) Michel BRÉAL, *Essai de Sémantique,* in-8°, Paris, 1897, p. 186.

(4) Dionysius LARDNER, *Differential and Integral Calculus,* in-8°, London, 1825, p. 221. — Jon. CAPE, *A Course of Mathematics,* in-8°, London, 1844, t. I, p. 117. — CARR'S, *A Synopsis of elementary results in pure Mathematics,* in-8°, London, 1886, p. 66.

indépendants des langues et, par conséquent, des lieux; malheureusement, par la force même des choses, ils sont nombreux, compliqués, partant difficiles à apprendre et à retenir.

384. Une écriture mathématique idéographique, comprenant à la fois la partie de calcul et la partie explicative, permettrait de diminuer l'étendue des Ouvrages ou Mémoires, et supprimerait la nécessité des traductions. C'est, sans doute, la considération de ces avantages qui a porté, en ces dernières années, plusieurs mathématiciens italiens à inventer une multitude de signes nouveaux pour écrire, non seulement les formules, mais encore les démonstrations.

Tous ces signes forment-ils ou formeront-ils ensemble une écriture mathématique idéographique, une *pasigraphie mathématique* s'appliquant à toutes les branches de la Science? Cette pasigraphie, une fois créée, sera-t-elle adoptée par tous les géomètres? Une fois adoptée, pourra-t-elle se perpétuer sans se modifier constamment, sans augmenter constamment le nombre de ses signes? Autant de questions difficiles, auxquelles on n'ose répondre par l'affirmative.

Mais, quel qu'en soit le résultat final, il est certain que cette tentative des savants italiens a exigé d'eux beaucoup de travail et d'efforts; qu'elle les a obligés à un examen approfondi et fructueux des idées fondamentales des Mathématiques. On peut dire, tout bien considéré, qu'elle leur fait le plus grand honneur.

# DEUXIÈME PARTIE.

## CHOIX.

385. Dans cette deuxième Partie, nous nous occupons du choix des signes; en d'autres termes, nous faisons connaître les règles à suivre, un système d'objets étant donné, pour le représenter par le système de signes le meilleur possible. Nous y énumérons d'abord les conditions auxquelles, pour être excellents, les signes doivent satisfaire : netteté, précision, rappel des propriétés de l'objet, rappel des rapports entre les objets; — nous montrons ensuite la façon de choisir les signes généraux et les signes des quantités mesurées; — nous examinons les cas simples où les objets, en nombre soit déterminé, soit indéterminé, sont tous d'une même sorte; — nous passons de là aux objets de deux sortes et aux correspondances qui peuvent exister entre eux; — puis aux objets de plus de deux sortes; — enfin à certains cas singuliers, où il est souvent impossible d'obtenir des signes excellents.

Nous sommes parfois conduit, dans cette deuxième Partie, à revenir sur certaines questions déjà traitées dans la première. Nous aurions pu y renvoyer simplement le lecteur. Nous avons pensé lui être plus utile en résumant, sous forme très abrégée, ce que nous avions déjà dit.

# CHAPITRE I.

## NETTETÉ DU SIGNE.

### Définition de la netteté.

386. Nous désignons par le mot *netteté* l'ensemble des conditions auxquelles, pour être *bon,* doit satisfaire un signe quelconque, *considéré en lui-même,* c'est-à-dire considéré isolément, abstraction faite de l'objet qu'il représente. Nous allons énumérer, en les expliquant par des exemples, les principales de ces conditions.

### Visibilité du signe.

387. Tout signe écrit doit être bien *visible.* Pour qu'il possède cette propriété, il faut évidemment qu'il soit assez *vigoureux,* assez *grand,* et que son *contour* ne présente nulle indécision.

388. Dire que le signe doit être *vigoureux,* c'est dire qu'il doit être fortement accusé, qu'il doit se détacher vivement sur le fond qui le supporte. Les signes mathématiques sont tracés d'ordinaire en noir sur un fond blanc, ou en blanc sur un fond noir. Il faudra donc que l'encre ou le tableau soient très noirs; la craie ou le papier très blancs. Il faudra aussi que le fond, papier ou tableau, soit d'une propreté absolue.

Dire que le signe doit être assez *grand,* c'est dire qu'il doit posséder des dimensions suffisantes pour pouvoir être, jusqu'en ses moindres parties, parfaitement perçu. Il n'en est point toujours ainsi : c'est un défaut grave. Il faut que les plus menus éléments, points, virgules, accents, indices, ne soient jamais trop petits.

Il faut enfin que le signe nous offre un *contour* absolument

arrêté. Le contour est indécis lorsque la main qui le trace manque de fermeté; il l'est aussi dans deux autres circonstances : lorsque le signe est tracé à l'encre sur un papier mal collé; lorsque le signe, tracé à la craie, en remplace un autre qui n'avait pas été parfaitement effacé. Dans ce dernier cas, il se produit sur le tableau noir comme une tache, comme un nuage : le contour n'est plus suffisamment arrêté; le fond n'est plus suffisamment propre. Quand un signe est erroné ou mal formé, il faut toujours l'effacer très soigneusement avant de tracer le signe exact ou correct qui le doit remplacer.

### Forme du signe.

389. Il faut d'abord que tout signe ait une *forme* franche et décidée, c'est-à-dire que les traits qui le composent soient nettement longs ou courts, droits ou courbes, réunis ou séparés, placés de façon bien déterminée les uns par rapport aux autres. Tout ce qui produirait la moindre hésitation dans l'écriture ou la lecture doit être sévèrement banni.

390. Nos signes d'opération, de groupement, de relation, les chiffres arabes, les caractères de l'alphabet latin, surtout lorsqu'ils sont bien imprimés, bien écrits, remplissent toutes ces conditions. Comme nous l'avons dit (109), les caractères de l'alphabet grec les remplissent à un degré moindre; ceux des alphabets gothique, hébreu, arabe, ... ne les remplissent pour ainsi dire plus.

Il conviendra donc, dans le choix des lettres, de donner la préférence aux caractères latins; de leur associer, s'il en est besoin, les caractères grecs; mais de ne recourir à ceux des autres alphabets que dans des cas tout à fait exceptionnels. On se demande si les fonctions *aleph* de Wronski, lesquelles ne sont que des polynomes homogènes très particuliers, exigeaient un nom et un caractère hébreux.

391. On peut choisir d'ailleurs l'une quelconque des variétés d'un même alphabet : lettres grandes ou petites, majuscules ou minuscules, droites ou penchées. On peut recourir aux caractères gras, aux caractères bâtons, à ceux de la bâtarde, à ceux de la ronde.

Quelque choix qu'on ait fait, il faudra, dans la variété choisie, préférer la forme la plus franche, la plus décidée, la plus connue, celle qu'on pourrait appeler *la forme normale;* et il faudra prendre cette forme telle quelle, sans la modifier, sans lui ajouter aucun trait. Les ornements, quels qu'ils soient, doivent être exclus de l'écriture mathématique : nous avons même conseillé plus haut (20) de supprimer les déliés et les pleins, et de n'employer partout que des traits d'épaisseur constante. Ce qu'il faut *rejeter* toujours, sans exception, soit pour les chiffres, soit pour les lettres, ce sont les *caractères de fantaisie.*

### Position et orientation.

392. Il faut indiquer la place que doit occuper chaque signe dans l'ensemble de l'écriture; dire s'il doit être sur la ligne principale, au-dessus ou au-dessous. Les signes de nombres, de quantités, d'opérations, de fonctions, de relations, d'objets quelconques se placent sur la ligne principale; certains signes de groupement se placent au-dessus, tel le trait horizontal employé en façon de parenthèse; certains signes de rédaction s'y placent aussi, tels les astérisques et les chiffres employés comme renvois ou appels de notes. Il faut que la *position* de chaque signe soit nettement indiquée.

393. L'*orientation* du signe doit l'être également. Il faut dire si les traits principaux qui le déterminent sont horizontaux, verticaux, ou placés dans quelque direction intermédiaire. Ce n'est que par le mode d'orientation que diffèrent : les barres des valeurs absolues de celle du signe moins; le chiffre 8 du signe de l'infini; les caractères romains des caractères italiques. Établit-on autre chose qu'une différence d'orientation, quand on couche une lettre, comme on le fait parfois pour l'S et le D; quand on la retourne de haut en bas, comme on le fait pour le Δ et le T?

### Positions relatives.

394. Considérons deux signes ou éléments de signes, très rapprochés l'un de l'autre, et tracés sur une page très petite. Suppo-

sons le premier au centre de cette page. Le second pourra, par rapport à lui, occuper *huit positions* différentes bien déterminées : les quatre coins de la page, et les milieux de ses quatre côtés. Ces huit positions existent évidemment à l'égard d'un premier signe quelconque; ce sera toujours en l'une d'elles que le second signe ou élément devra être placé.

Telles sont, autour du signe principal, les positions relatives des menus éléments significatifs qui l'affectent, et que j'ai nommés *éléments modificateurs*. Les indices se mettent à droite et en bas, les accents à droite et en haut; mais on pourrait aussi les mettre à gauche et en haut, à gauche et en bas. On pourrait encore les placer juste au-dessus, comme le faisaient Newton pour le point des fluxions et Cramer [1] pour certains indices; juste au-dessous, comme on le fait quand on souligne une lettre ou un chiffre. Les traits, droits ou courbes, qu'on emploie en Géométrie pour marquer les cordes et les arcs; les accents circonflexes dont on se sert dans la notation des angles, se placent au-dessus des groupes de deux ou trois lettres constituant le signe principal. Les guillemets, les parenthèses, les crochets, les petites barres verticales, servant à isoler une quantité ou un nombre, à le mettre en relief, à en marquer la valeur absolue, se placent à sa droite et à sa gauche. Quelque cas qui se présente, le plus important, après qu'on a choisi le modificateur à employer, c'est de bien préciser la place qu'on lui assignera par rapport au signe principal. Il ne faut point qu'il y ait jamais, au sujet de cette place, le moindre doute, la moindre hésitation.

395. Aux *huit* positions relatives qu'on vient d'énumérer, on n'en saurait ajouter que *deux :* celle où le second élément se place à l'*intérieur* du premier, celle où ce second élément se *superpose* au premier. Parmi les signes mathématiques, les exemples d'éléments occupant l'une ou l'autre de ces positions sont extrêmement rares. Comme élément placé dans un autre, on ne peut guère citer que la minuscule qu'on écrit parfois, en souvenir peut-être de la numération grecque, entre les deux jambages de la majuscule Π. Comme élément superposé, que la barre ou l'arc qui figure dans les

---

[1] Né en 1704, mort en 1752.

signes négatifs de relation $\neq$, $\not>$, $\not<$; que la barre verticale double et la barre horizontale simple que nous présentent les signes abrégés $ et £ du dollar et de la livre sterling. Ce n'est qu'après mûre réflexion qu'on pourra, dans la création des signes nouveaux, avoir recours aux éléments insérés ou superposés.

### Assemblage des éléments.

396. Dans un même signe, deux éléments voisins doivent toujours être absolument *réunis* ou absolument *séparés*. Il serait mauvais qu'on pût hésiter sur cette réunion ou séparation. En particulier, il ne faut point que les accents, exposants, indices, qui doivent toujours être séparés des lettres ou chiffres qu'ils affectent, puissent jamais leur paraître réunis.

397. Tout signe doit être *séparé* du signe qui le suit, comme de celui qui le précède. On devra donc en écrivant éviter tous ces traits légers qu'on nomme *liaisons* et qui lient, en effet, les signes entre eux. *A fortiori,* ne faudra-t-il jamais qu'un trait appartenant à un signe traverse un autre signe; qúe des lignes trop serrées empiètent les unes sur les autres; que les lettres ou chiffres placés en numérateur coupent la barre horizontale de fraction.

398. Il semble que les lettres très penchées, celles par exemple de l'écriture dite *anglaise*, empiètent plus facilement que les autres sur les lettres voisines. Il est certain qu'elles en paraissent moins séparées. Voilà pourquoi nous pensons que, dans l'écriture mathématique manuscrite, il faut donner la préférence aux *caractères droits,* ou *presque droits*.

### Brièveté du signe.

399. Tout signe doit être *bref,* c'est-à-dire doit n'occuper, sur la page où on l'écrit, qu'une place relativement faible.

Une science, suivant un mot célèbre, n'est qu'une langue bien faite. On pourrait presque dire de l'*Algèbre* qu'elle n'est qu'une

*écriture*. C'est de la brièveté des signes qui la composent, que cette écriture tire ses principaux avantages.

Un signe peut manquer de brièveté pour deux raisons souvent réunies : parce qu'il occupe une *trop grande* étendue ; parce qu'il présente des éléments *trop nombreux*. Le premier soin à prendre pour obtenir la brièveté sera donc de ne donner aux signes, non plus qu'aux vides qui les séparent, qu'une étendue raisonnable. Le second, de réduire au minimum le nombre de leurs éléments.

400. Certaines lettres sont trop étendues de haut en bas : telles sont la plupart de celles qui dépassent le corps de l'écriture. D'autres le sont trop de droite à gauche : telle est la lettre *m* que l'on est en quelque sorte obligé de comprimer dans les machines à écrire. Pourquoi les minuscules *i*, *j*, *t* sont-elles si usitées comme exposants ou indices? A cause de leur étroitesse. Pourquoi, pour remplir ce même rôle, les majuscules le sont-elles si peu? Parce qu'elles sont trop grandes : elles le paraissent surtout lorsqu'elles affectent des lettres minuscules.

Dans les calculs, le signe $\times$ de la multiplication occupe aussi une trop grande place ; il ne faut, pour ainsi dire, l'employer qu'entre les facteurs numériques qui présentent des décimales : en tous les autres cas, il convient de le remplacer par un point, ou même, s'il n'en résulte aucun inconvénient, de le supprimer tout à fait.

401. Il est toujours avantageux de diminuer le nombre des éléments. Il faut le faire toutes les fois qu'on ne produit ainsi ni ambiguïté, ni erreur. On dit d'ordinaire l'angle $\widehat{POQ}$, le tétraèdre ABCD. N'est-il pas beaucoup meilleur, s'il n'en résulte aucun inconvénient, de dire l'angle O, le tétraèdre T? Il faut réduire au minimum le nombre des lettres employées pour désigner les figures. C'est ce qu'on fait toujours, lorsqu'on raisonne sur elles sans les tracer.

Quand on choisit un signe graphique quelconque parmi les signes déjà existants, il faut, si l'on peut s'exprimer ainsi, le réduire à sa plus simple expression, en y supprimant tous les éléments non indispensables. Quand on crée de toutes pièces un signe graphique nouveau, il le faut composer d'un fort petit nombre de traits, trois ou

quatre au plus : c'est là le nombre maximum des éléments non significatifs que nous présentent les chiffres arabes et les lettres de notre alphabet.

### Signes compliqués.

402. Rien de plus contraire à la netteté du signe que sa *complication*. Il la faut éviter à tout prix. Cette complication, d'ailleurs, peut provenir de deux causes différentes : de ce qu'on veut faire dire trop de choses au signe; de ce qu'on introduit dans le signe un ou plusieurs éléments inutiles.

403. Comme nous l'avons déjà dit (142), il est mauvais que les exposants ou indices soient trop grands; il l'est aussi qu'ils soient trop nombreux; il l'est encore qu'ils soient affectés à leur tour d'exposants ou d'indices; il l'est surtout qu'ils se présentent à nous sous forme de polynomes, d'expressions, de fonctions. On va présentement, dans cette mauvaise voie, jusqu'à écrire, en exposants ou en indices, des égalités véritables.

D'ailleurs, on peut le dire, dans l'écriture actuelle des Mathématiques, on abuse des égalités. Pour indiquer la valeur particulière de la fonction U de $x$ qui correspond à la valeur particulière $a$ de cette variable, on écrit $U_{x=a}$. Ne suffirait-il point d'écrire $U_a$? Pour désigner le point du plan qui a pour coordonnées cartésiennes $a$ et $b$, certains auteurs, et non pas des moindres, écrivent $(x = a, y = b)$. Ne suffirait-il point de le désigner par la notation $(a, b)$ qui est beaucoup plus courte et, au moins, aussi claire?

404. Un signe compliqué n'est point seulement pour nous un ensemble d'éléments trop nombreux. C'est un ensemble mal disposé, mal ordonné, confus, obscur. Pour dire qu'un signe n'est point compliqué, nous eussions aimé dire qu'il est *simple;* mais, d'après ce qui précède, cette épithète eût été insuffisante. Pour nous, en tout cet Ouvrage, simple sera l'opposé de *complexe,* et non pas celui de compliqué. Comme nous le verrons plus tard, la complexité ne peut pas toujours être évitée : la complication doit toujours l'être.

405. Quoi qu'il en soit, des considérations d'un autre ordre nous

donneront bientôt de nouveaux moyens d'augmenter la *brièveté* du signe et d'en diminuer la *complication*. Mais c'est seulement dans notre troisième Partie, que nous nous occuperons des procédés à employer pour écrire, d'une façon *abrégée* ou *condensée*, les expressions à éléments trop nombreux.

### Immuabilité du signe.

406. Quel que soit l'objet mathématique à représenter, le signe mathématique, nous l'avons dit plusieurs fois, doit être choisi avec le plus grand soin. De plus, quand le choix est fait, il faut qu'on s'y tienne. Le signe ne doit jamais changer; il doit être invariable, *immuable*.

407. Il doit l'être absolument, dans sa forme, dans sa grandeur, dans sa position, toutes les fois que les circonstances restent les mêmes; par conséquent, dans toute l'étendue d'un Mémoire imprimé ou manuscrit, dans tout le cours d'une démonstration au tableau noir. La position du signe relativement à l'ensemble de l'écriture, la position des éléments modificateurs par rapport au signe, ne doivent même point changer avec les circonstances. Les dimensions du signe varient, au contraire, forcément, puisque, sur le tableau noir, elles sont forcément supérieures à ce qu'elles sont sur le cahier ou le Livre. Mais, pour ce qui est de la forme, il faut que deux représentations de grandeur différente du même signe soient toujours deux figures semblables et semblablement placées, c'est-à-dire deux figures *homothétiques*.

Il est évident que la machine à écrire, la typographie, la stéréotypie sont très favorables à l'immuabilité du signe, mais que l'écriture manuelle, à la plume, au crayon, à la craie, lui est fort contraire. Lorsqu'elle est tracée vite et sans soin, l'écriture manuelle apporte au signe mille modifications diverses; elle en arrive parfois à lui faire perdre toute individualité, à le rendre méconnaissable.

408. Il suit évidemment de ces différentes considérations que l'on ne saurait, dans le cours d'un calcul, remplacer des chiffres égaux par des inégaux; des lettres majuscules par des minuscules; des caractères romains par des italiques. Si une certaine lettre de

l'alphabet possède deux formes différentes, il faut opter entre elles, choisir l'une et ne jamais la remplacer par l'autre, laquelle doit être regardée dès lors comme un signe sans rapport avec le précédent.

Nous avons dit (19) les graves inconvénients qu'il y aurait, dans l'écriture des nombres, à modifier, déplacer, ajouter ou omettre un ou plusieurs chiffres. Il en est de même pour tous les éléments d'un signe quelconque, même pour les menus éléments dits *modificateurs : il n'en faut jamais modifier, déplacer, ajouter, ni omettre aucun.*

409. Quand on a fait, relativement à l'écriture, une *convention* quelconque, il faut l'*observer scrupuleusement,* et se garder, à quelque moment que ce soit, d'y contrevenir, de l'enfreindre. Il ne faudra jamais contrevenir, par exemple, aux conventions qu'on pourrait avoir faites : de mettre, dans le groupe de trois lettres qui désigne un angle, la lettre du sommet au milieu; de prendre, pour initiales des notations sin, cos, tg, des lettres minuscules; de placer entre parenthèses la variable qui suit une caractéristique de fonction.

### Signes assimilables.

410. On n'emploie un signe avec facilité que quand on le possède bien, que quand, au moment du besoin, on le retrouve immédiatement et sans peine. Il est donc nécessaire que le signe, en tant que signe, abstraction faite de l'objet qu'il représente, soit de nature telle que nous puissions, sans trop d'efforts ni de temps, arriver à le retenir très bien, à nous le rendre familier, à nous l'*assimiler.*

411. Le moyen le plus simple pour obtenir des signes qui nous soient assimilables, c'est de puiser dans les collections de signes que nous possédons parfaitement, c'est-à-dire dans les alphabets qui nous sont bien connus, dans celui surtout de notre langue maternelle; et d'y prendre certaines lettres pour en constituer nos signes. C'est ainsi qu'avaient procédé les Grecs et les Romains pour se procurer des signes numériques, des chiffres. C'est ainsi qu'on doit procéder, et qu'on procède en effet depuis Viète, pour représenter les quantités et les nombres indéterminés.

Les lettres prises ainsi dans l'alphabet et portées dans l'écriture

de l'Algèbre perdent évidemment leur ancienne signification pour en prendre une nouvelle; de caractères phonétiques qu'elles étaient, elles deviennent des caractères idéographiques. Toutefois, elles conservent leurs noms, et c'est là un grand avantage, car il est nécessaire pour qu'un signe puisse entrer dans un discours, dans un raisonnement, que ce signe ait un *nom*.

On peut aussi, comme nous avons conseillé de le faire (227) pour les caractéristiques des fonctions, former un signe nouveau en liant entre elles un petit nombre de lettres, c'est-à-dire d'éléments puisés encore à la même source. Il faut bien l'avouer, en dehors des alphabets, il n'existe guère de collections de signes que les Mathématiques puissent utiliser. On pourrait citer la collection des signes spéciaux de l'Astronomie, mais ils sont peu nombreux, compliqués et déjà employés dans certains calculs : Bellavitis en a tiré cependant son signe de l'équipollence.

412. Pour ce qui est des signes nouveaux formés de toutes pièces, à moins qu'ils ne soient de *petites figures* tirées de la géométrie plane, ou de *petites images* fort simples, ils sont très difficiles à retenir. Toutes les personnes qui ont dû apprendre un alphabet complètement ignoré d'elles se rappellent ce que cette étude leur a coûté d'efforts. On peut le dire, d'une manière générale, *il faut être très réservé dans la création des signes nouveaux;* il n'en faut imaginer qu'en cas de nécessité absolue.

# CHAPITRE II.

## PRÉCISION DU SIGNE.

### Définition de la précision.

413. Plusieurs signes considérés ensemble, abstraction faite de la nature des objets qu'ils représentent, doivent pour être bons posséder certaines qualités. Il faut qu'ils *diffèrent* franchement les uns des autres; qu'ils *correspondent* chacun à chacun à leurs objets respectifs; qu'ils puissent être facilement *rapportés* à ces objets. C'est l'ensemble de ces qualités que je désigne par le mot *précision*.

### Différence de deux signes.

414. Deux signes différents ne doivent jamais risquer d'être confondus : ils doivent toujours présenter une *différence nette, tranchée*. Cette différence est constitutionnelle, lorsqu'elle tient à la forme même des signes; accidentelle, lorsqu'elle résulte des altérations produites par une mauvaise écriture. Elle est *simple* ou *multiple*, suivant qu'elle dépend d'un seul détail ou de plusieurs : la différence entre m et n est simple, la différence entre $a'$ et A est multiple : c'est évidemment parmi les différences simples que se rencontreront le plus souvent les différences insuffisantes, les différences à éviter.

415. Les caractères, soit imprimés, soit manuscrits, qui ne diffèrent pas assez se présentent fréquemment. Nous trouvons ainsi : dans l'alphabet latin, les majuscules E et F, les minuscules c et e; dans l'alphabet grec, les minuscules $\omega$ et $\varpi$, les majuscules O et $\Theta$; dans l'alphabet allemand, les minuscules f et s; les majuscules B

et V; M et W. Parmi les chiffres arabes, on peut confondre : 1 et 7; 3 et 5; 8, 3 et 6. Parmi les signes astronomiques, le signe de la Vierge ressemble trop à celui du Scorpion; et le signe du Lion à celui du nœud ascendant.

416. Ces ressemblances trop grandes se rencontrent plus souvent encore, lorsqu'on emploie simultanément plusieurs systèmes de caractères : lettres latines, lettres grecques, chiffres arabes, signes astronomiques. Nous pouvons citer comme tels : r, z et 2; h et $\lambda$; p, $\mu$ et $\rho$. La lettre $\psi$ et la lettre $\gamma$ sont presque identiques, celle-là au signe de Neptune, et celle-ci au signe du Bélier.

417. Deux caractères ayant des figures analogues, mais dont l'un nous présente un contour *anguleux* et l'autre un contour *arrondi,* se distinguent parfaitement : nul ne confond, à la lecture, les lettres gothiques avec les romaines. Au contraire, la différence entre les caractères *droits* et les caractères *penchés* disparaît pour ainsi dire dans l'écriture manuelle : aussi, sur la copie qu'il donne à l'imprimeur, l'auteur qui veut qu'une lettre, un mot soit imprimé en italique, fait-il bien de le souligner.

Une différence, due à l'*orientation,* à la *position,* aux *circonstances,* n'est suffisante que si elle est très nette. Il est certain qu'on ne confond point à la lecture les barres horizontales avec les verticales; ni le chiffre 8 avec le signe $\infty$; ni, lorsqu'ils sont bien placés, les exposants avec les indices. Si le signe moins et la barre de fraction ne se prennent jamais l'un pour l'autre, bien qu'ils soient identiques et que leurs positions soient les mêmes, c'est que le premier n'a jamais rien au-dessus ni au-dessous de lui, tandis que le second se présente toujours entre deux expressions, l'une au-dessus, l'autre au-dessous. Un exposant qui n'est pas placé assez haut peut être pris pour un coefficient; au lieu de $\sin^2 x$, on peut lire $\sin 2x$ : il faut donc que les menus modificateurs, accents, exposants, indices, soient parfaitement à leurs places; il faut aussi qu'ils soient assez forts, assez marqués pour ne pouvoir passer inaperçus, malgré leur petitesse; lorsque ces conditions sont remplies, les différences sont suffisantes, sont bonnes, comme on le voit sur $a$ et $a'$, sur $b$ et $b_1$.

418. Les différences dues seulement aux *dimensions relatives*

ne sont pas, en général, suffisantes. Elles ne le deviennent que si elles sont exagérées, que si les dimensions du plus grand signe sont presque doubles de celles du plus petit. Ce n'est que par une pareille exagération que l'on distingue bien : en toute écriture, le trait d'union du tiret; en tout alphabet, les grandes lettres des petites; dans l'alphabet latin, les majuscules O, C, V, Z des minuscules correspondantes.

Une différence due au mode de groupement, à la disposition, à l'*ordre* des éléments est suffisante dès qu'elle est nette. Arrive-t-il jamais que l'on confonde : en Arithmétique, 213 et 321; 34,5 et 3,45? en Algèbre? $a - b$ et $b - a$; $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$, en Géométrie, AB et BA qui représentent deux segments égaux et de sens contraires; CAB, ABC, BCA qui désignent sans ambiguïté les trois angles du triangle ABC? C'est sur des considérations d'*ordre* que notre admirable système de numération écrite est principalement fondé.

### Première règle fondamentale.

419. *Que le même signe représente toujours le même objet. Que deux objets différents soient toujours représentés par deux signes différents.* Ce sont là deux énoncés équivalents, exprimant chacun notre première *règle fondamentale*.

Cette règle évidemment est tout à fait stricte. On ne saurait l'enfreindre sans rendre impossible tout raisonnement, tout calcul. Pourrait-on suivre une démonstration géométrique où une même lettre se rapporterait tantôt à un élément de la figure, tantôt à un autre? Pourrait-on effectuer un calcul d'Arithmétique, d'Algèbre, d'Analyse pendant le cours duquel un chiffre, une lettre, un signe quelconque changerait de signification? Il faut n'employer jamais, dans une même question, un même signe, ni deux signes identiques, en leur attribuant des significations différentes.

420. Les *infractions* à la présente règle sont *extrêmement graves*, car l'imperfection la plus grande que puissent présenter les signes, c'est l'ambiguïté, la multiplicité de leurs significations. Les fautes de ce genre sont tellement faciles à éviter, que l'on devrait,

ce semble, n'en rencontrer jamais de telles. On en rencontre fréquemment dans les copies des élèves, et même dans des Ouvrages imprimés.

Dans les copies des élèves, on rencontre souvent l'une des lettres $a$, $p$, $r$, employée pour représenter une longueur quelconque, dans une question où cette même lettre représente déjà le demi-grand axe d'une ellipse, ou le paramètre d'une parabole, ou le rayon d'un cercle.

Dans des Ouvrages imprimés, je rencontre une foule d'exemples aussi fautifs. En une même question de Mécanique, $e$ représente tantôt l'espace parcouru, tantôt la base des logarithmes népériens; $g$, tantôt le gramme, tantôt l'accélération due à la pesanteur; V, tantôt une vitesse, tantôt un angle; $F_t$, tantôt une force tangentielle, tantôt une force à l'instant $t$; $m$, tantôt une masse, tantôt le nombre des forces. En une même question d'Algèbre, un auteur considère une équation du quatrième degré en $x$ et en appelle les quatre racines $x$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, sans s'apercevoir qu'il donne à $x$ deux significations différentes. En une même question de Géométrie, la lettre P parfois désigne un point, parfois remplace le mot *projection;* les lettres $x$, $y$ sont tantôt les coordonnées courantes, tantôt les coordonnées d'un point particulier fixe. Dans la théorie des courbes tracées sur les surfaces, $s$ représente tour à tour l'arc de la courbe, et la dérivée partielle du second ordre de $z$, prise successivement par rapport à $x$ et à $y$ : un géomètre plus attentif, pour éviter cette faute, a remplacé par $\sigma$ le premier de ces deux $s$.

**421.** En différents systèmes de grandeurs, une même lettre, prise comme abréviation, peut représenter des unités sans analogie entre elles. Il n'en résulte aucun inconvénient, quand ces systèmes ne sont point employés en même temps; mais, lorsqu'ils viennent à l'être, une foule de fautes se produisent : $m$ signifie tantôt mètre, tantôt minute; $s$, tantôt seconde, tantôt stère; $t$, parfois tonne et parfois toise; $\lambda$, tour à tour une latitude, un microlitre, une longueur d'onde. Je ne parle pas des notations $1^\circ$, $2^\circ$, $3^\circ$, ..., qui représentent suivant les cas des numéros d'ordre ou des nombres de degrés; ni des abréviations $10^{me}$, $11^{me}$, $12^{me}$, ..., qui représentent tantôt des numéros d'ordre aussi, tantôt des parties aliquotes de l'unité. Lorsque ces fâcheuses rencontres viennent à se produire, il

en faut supprimer ou, tout au moins, atténuer les suites. On les supprime, en modifiant les abréviations, par exemple en leur ajoutant une seconde lettre convenablement choisie. On les atténue, en rédigeant de telle sorte que le contexte indique toujours, à chaque instant, la signification qu'il convient d'attribuer au signe.

### Notation des dérivées.

422. D'après notre première règle fondamentale, l'accent employé pour marquer les dérivées exclut [1], de toute question où il figure, les accents employés à un autre usage quelconque. Nulle faute n'est plus commune que celles qu'on commet en ne tenant aucun compte de cette exclusion. Les exemples fourmillent.

423. En une même question : $t'$ est une dérivée, $v'$ n'en est pas une; $Q'$ désigne un point, $F'$ une dérivée; $M'$, un point encore, $x'$, $y'$, $z'$ les dérivées de $x$, $y$, $z$; ces mêmes lettres accentuées sont les dérivées de $x$, $y$, $z$, mais $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ sont les cosinus directeurs de la normale principale. Dans une question où figurent des dérivées marquées par un accent : $z'$ n'est pas la dérivée de $z$; $u'$ est l'inverse de $u$; S et S' sont deux surfaces, $\omega$ et $\omega'$ deux périodes; V' et S', $\lambda'$ et $\mu'$ de nouvelles valeurs de V et de S, de $\lambda$ et de $\mu$.

Bien plus, dans certaines théories des dérivées, où les dérivées sont toujours marquées par des accents, on trouve : $z'$ pour une valeur particulière de la variable; $h'$ pour une nouvelle valeur de l'accroissement; $\varepsilon'$ pour un infiniment petit; $m'$ pour la valeur absolue de l'exposant $m$. Dans la recherche du coefficient angulaire $y'$ d'une courbe au point M, on appelle M' le point de la courbe qui se rapproche de M, et dont l'ordonnée, dans une bonne notation, devrait s'appeler alors $y'$. Pour démontrer que, si la dérivée $y'$ est constamment nulle entre $a$ et $b$, la fonction $y$ est constante, un élève a pris devant moi, dans cet intervalle, deux valeurs de $x$, et les a nommées $x'$, $x''$.

424. Les géomètres déplorent, depuis longtemps, les mauvaises

---

[1] POINCARÉ, *Enseignement mathématique*, t. I, p. 106.

notations employées pour les dérivées (236). Si $u$ est une fonction de la seule variable $x$, l'expression $\frac{du}{dx}$ exprime la dérivée ordinaire, la véritable dérivée de $u$ par rapport à $x$; le rapport indiqué est un véritable rapport, dont les deux termes peuvent être séparés. Si $u$ est une fonction de $x$ et de $y$, l'expression $\frac{du}{dx}$ n'est plus une dérivée proprement dite; c'est une dérivée partielle; le rapport indiqué est toujours un vrai rapport, mais il ne doit pas être traité comme tel : les deux termes n'en peuvent être séparés, isolés. Voilà donc un même signe $\frac{du}{dx}$ qui représente deux objets différents. Pour faire disparaître cette faute, on a imaginé de remplacer, dans la notation des dérivées partielles, les *d droits* par des *∂ ronds;* écrivant toujours $\frac{du}{dx}$ pour la dérivée ordinaire, on représente la dérivée partielle par $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Cet emploi du $\partial$ rond constitue un perfectionnement réel; il est assez récent; il a été universellement adopté; mais il ne suffit pas à empêcher toutes les confusions possibles. Supposons, par exemple, que $u$ désigne une fonction des variables indépendantes $x$ et $y$ et d'une fonction $z$ de ces variables, et que l'on demande la dérivée partielle de $u$ par rapport à $x$. En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées, on arrive à l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

qui paraît absurde. Il est clair que $\frac{\partial u}{\partial x}$ y figure avec deux significations différentes. Peut-être, pourrait-on indiquer par $\frac{\partial}{\partial x}u$ le calcul à effectuer et par $\frac{\partial u}{\partial x}$ l'un des termes du résultat? L'égalité deviendrait alors

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Mais cette nouvelle manière d'écrire, même associée comme ici à l'emploi du $\partial$ rond, ne serait pas toujours suffisante. On se demande s'il est possible de créer, pour les dérivées, un système de notations qui ne soit jamais en défaut.

### Seconde règle fondamentale.

425. *Que le même objet soit toujours représenté par le même signe. Que deux signes différents représentent toujours deux objets différents.* Ces deux énoncés sont équivalents et expriment chacun notre seconde règle fondamentale.

Cette seconde règle correspond tout à fait à la première; elle en est la contre-partie et, pour ainsi parler, le pendant. Les fautes qu'on peut faire contre elle sont tout aussi faciles à éviter. Elles n'en sont pas plus rares.

426. La multiplication s'indique tantôt par le signe $\times$, tantôt par un point, tantôt par le simple rapprochement des facteurs; la division, tantôt par deux points superposés, tantôt par une barre horizontale; l'identité, tantôt par le signe $\equiv$, tantôt par le signe $\Xi$, tantôt par le signe de congruence; le logarithme népérien, tantôt par un L majuscule, tantôt par le groupe log.

Il faudrait garder les mêmes notations pendant tout le cours d'une même question, surtout d'un même calcul. Ne pas écrire, par exemple, pour un angle unique, tantôt A, tantôt ABC. Ne pas employer à la fois pour une même grandeur des unités différentes; ne pas désigner, par exemple, dans un même problème, l'angle droit tour à tour par $1^d$, par $\frac{\pi}{2}$, par $90^\circ$. Pour les notations même qui, par leurs objets, se peuvent rencontrer en la plupart des questions traitées dans un Ouvrage, on ferait bien de les conserver dans cet Ouvrage tout entier, de même qu'on garde constamment, en Géométrie descriptive, les mêmes façons de ponctuer.

427. Il serait bien à désirer que tous les auteurs, soit d'un même pays, soit de pays différents, employassent, pour les mêmes objets, les mêmes signes idéographiques. Ils le font déjà pour les nombres, qu'ils écrivent tous à l'aide des mêmes chiffres; mais ils sont loin de le faire pour tous les objets, expressions, fonctions qu'ils ont à représenter. La factorielle $n$ se désigne en France par $n!$; en Allemagne, par $(n)$; en Angleterre, par $\underline{|n}$. La fonction inverse de $\sin x$ se représente chez nous par $\operatorname{arc}\sin x$, chez les Anglais par

$\sin^{-1} x$. Les nombres de Bernoulli se désignent et même se définissent d'une foule de façons différentes. Les géomètres n'ont pu encore s'entendre pour représenter, tous de la même manière, les fonctions elliptiques, non plus que leurs périodes. Pourquoi n'adopteraient-ils pas uniformément les notations $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, dues à Jacobi et abrégées par Gudermann, en leur associant, en cas de besoin, les notations de Weierstrass?

428. Les notations employées dans l'Algèbre de Viète, dans la Géométrie de Descartes, et même, plus près de nous, dans l'*Introductio in analysin Infinitorum* d'Euler diffèrent beaucoup de celles que nous employons présentement. On a remplacé les signes anciens par les signes actuels dans plusieurs éditions récentes de la Géométrie de Descartes; on se propose d'en faire autant dans une nouvelle édition des Œuvres de Viète; le très érudit Terquem [1] demandait [2] qu'on effectuât aussi cette substitution en publiant à nouveau l'*Introductio in analysin*. Ce changement de notations, dans des Ouvrages anciens et célèbres, aurait sans doute ses avantages; mais ne présenterait-il pas aussi quelques inconvénients? Ne modifierait-il pas trop l'aspect et comme le caractère de ces Ouvrages? Ne risquerait-il point, pour peu que l'éditeur manquât de soin ou de compétence, d'y introduire des contre-sens, ou même de graves erreurs?

### Signes équivalents.

429. Au point de vue de la théorie générale des signes, notre seconde règle fondamentale est aussi stricte, aussi rigoureuse que la première. Dans la pratique, elle l'est beaucoup moins, parce que les infractions qu'on y peut faire ont des inconvénients beaucoup moindres. Il est bien évident que nos deux manières d'indiquer la division, nos trois manières d'indiquer la multiplication peuvent s'utiliser concurremment sans entraîner de suites vraiment graves.

430. Dans beaucoup de cas, d'ailleurs, des signes qui semblent

---

(1) Né en 1782, mort en 1862.

(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, in-8°. Paris, 1842, p. 407.

enfreindre cette règle n'y contreviennent qu'en apparence. Supposons que, dans une même question, nous ayons à considérer simultanément deux suites linéaires d'objets; que nous leur fassions correspondre deux suites de numéros; et que nous écrivions 1°, 2°, 3°, 4°, ... pour les numéros de la première suite, et I, II, III, IV, ... pour ceux de la seconde. Peut-on dire, par exemple, que 4° et IV soient deux signes représentant un même objet? Ils représentent, en réalité, deux objets différents.

Il en est de même des expressions, des notations *équivalentes,* si fréquentes en Mathématiques. Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont-elles deux signes différents d'un même objet? Nullement; elles représentent deux nombres, à la vérité égaux, mais différents par leurs définitions mêmes. Sont-ce deux signes différents représentant un même objet que $26^{m},5$ et $265^{dm}$? Non pas; ce sont deux signes différents de deux objets différents; les longueurs qu'ils désignent, bien qu'égales dans la réalité, ne sont point identiques pour notre esprit. Comme nous l'avons dit plus haut, on met à profit l'équivalence des signes dans deux circonstances et pour deux fins différentes : dans le cas d'un seul objet, pour en obtenir le *signe le plus simple* possible; dans le cas de plusieurs, pour leur attribuer des signes *comparables* entre eux.

431. Quoi qu'il en soit, lorsque nos deux règles fondamentales sont parfaitement observées : un même objet est toujours représenté par le même signe; un même signe représente toujours le même objet; deux objets différents sont toujours représentés par deux signes différents; deux signes différents représentent toujours deux objets différents. Les *objets* que l'on considère et les *signes* qui les représentent sont alors en *même nombre;* ils se correspondent *chacun à chacun;* ils sont choses corrélatives, liées ensemble, *inséparables.*

### Initiales mnémoniques.

432. Il faut, avons-nous dit, que les signes soient *faciles à retenir.* Il faut de plus qu'ils soient faciles à *rapporter* à leurs objets respectifs. On arrive à les rendre tels, en se servant d'un *procédé mnémonique* simple, imaginé par les premiers algébristes,

et qui consiste à établir un lien, non pas entre le signe et l'objet lui-même, mais entre le signe et le nom de l'objet. Je veux parler de la coutume, si ancienne et si générale, de choisir, pour représenter un objet, une ou plusieurs des premières lettres de son nom.

433. *Si l'on parlait,* dit un auteur du commencement du XVIII^e siècle (¹), *de pistoles, d'écus, de sols, on pourrait appeler les écus e, les pistoles p, les sols s.* C'est ainsi que nous agissons constamment.

N'appelons-nous pas $d$ la raison des progressions par différences; $q$, celle des progressions par quotients; et, dans les deux cas, $n$ le nombre total des termes, $s$ leur somme, $p$ leur produit? Nous désignons presque toujours : en Astronomie, le Soleil, la Lune, la Terre par S, L, T; en Mécanique, l'espace par $e$, la force par $f$, le travail par T, le centre de gravité par G; en Physique, le poids, le volume, la densité par P, V, D; dans les équations de dimensions, la longueur par L, la masse par M, le temps par T.

Dans les figures de la Géométrie élémentaire, on met C au centre des cercles ou des sphères; S au sommet des pyramides et des cônes; P au pied d'une perpendiculaire; T sur une tangente; N sur une normale. Dans les formules, on désigne une base par B; une hauteur par H; une aire par A; un volume par V; un rayon par R. Lorsqu'on raisonne sur des figures non tracées, on dit le plan (P), la droite (D), la courbe (C), la sphère ($\Sigma$), la surface (S).

Pourquoi, en Géométrie analytique, le point qui décrit une courbe se nomme-t-il toujours M? Parce que M est l'initiale de *mobile*. Pourquoi la variable dont dépendent, à chaque instant, ses coordonnées se nomme-t-elle toujours $t$? Parce que $t$ est l'initiale de *temps*. Pourquoi place-t-on toujours la lettre $z$ sur l'axe vertical? Parce que la direction positive de cet axe indique le *zénith*.

434. Il va sans dire, d'ailleurs, qu'une initiale déjà employée pour rappeler un mot ne peut plus l'être, dans la même question, pour en rappeler un autre : l'initiale N du mot *nord* exclut ainsi celle du mot *nadir*. Il va sans dire aussi qu'il faut toujours craindre de faire naître, par un mauvais choix de lettres, une fausse ana-

---

(¹) Le R. P. BERNARD, *Éléments de Mathématiques,* in-12, Paris, 1715, p. 347.

logie et, par conséquent, une confusion, une erreur : on aurait tort d'appeler M un point *fixe,* ou F un point *mobile;* de nommer $a$ et $b$ les deux bases d'un trapèze, car $a$ ne semble point en indiquer une; d'appeler $\varepsilon$ l'erreur absolue et $\alpha$ l'erreur relative d'un nombre approché, la lettre $\alpha$ rappelant d'elle-même le mot *absolue;* on aurait tort aussi, comme plusieurs professeurs l'ont déjà fait remarquer, de représenter par $m$ une fonction de $x$ dont on cherche le *maximum* ou le *minimum.*

435. Leibniz insiste beaucoup, dans l'une de ses lettres, sur les avantages qu'offre l'emploi des *indices.* Ces avantages résultent surtout de ce que les indices jouent très souvent, dans les notations, le rôle d'*éléments mnémoniques.* C'est ce qui arrive pour $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., où les indices sont des numéros d'ordre; pour $e_t$, $v_t$, qui désignent l'espace parcouru et la vitesse à l'instant $t$; pour $\gamma_t$ et $\gamma_n$, qui désignent l'accélération tangentielle et l'accélération normale; pour $T_m$, $T_u$, $T_r$, qui représentent le travail moteur, le travail utile et le travail résistant; pour $A_x$, $A_y$, $A_z$, qui sont les projections d'une aire A de l'espace sur les trois plans des coordonnées; pour $(C_x)$, $(C_y)$, $(C_z)$, qui sont pareillement, sur ces trois mêmes plans, les projections de la courbe (C).

436. Au lieu d'écrire l'initiale seulement du nom de l'objet, on en écrit parfois les deux, trois ou quatre premières lettres : c'est ce qu'on fait quand on écrit log, sin, tg; c'est ce que nous avons conseillé de faire toujours pour représenter les caractéristiques des fonctions déterminées particulières.

Lorsque le nom de l'objet se compose de deux parties, il est bon d'en prendre les deux initiales : nous avons opéré ainsi pour indiquer en abrégé, dans le système métrique, les multiples et sous-multiples de l'unité principale, en écrivant, par exemple, dm, cm, mm pour décimètre, centimètre, millimètre; nous avons encore opéré de même, en écrivant mq pour mètre carré et mc pour mètre cube.

On désigne souvent le centre de gravité par cdg et le système des nouvelles mesures par C.G.S : chacune de ces abréviations se compose de trois lettres. Quand on écrit pgcd pour plus grand commun diviseur et ppcm pour plus petit commun multiple, on

emploie les quatre initiales des quatre parties composant le nom de l'objet; mais il y a surabondance de lettres. Il est bien clair qu'il eût suffi de rappeler, dans le premier cas, les deux mots *grand* et *diviseur;* dans le second, les deux mots *petit* et *multiple :* c'est ce que rappellent précisément, lorsqu'on les considère à la fois dans leur taille et dans leur nature, les deux lettres grecques Δ et μ. Il est évident, au point de vue mnémonique, que δ ne vaudrait rien.

# CHAPITRE III.

## RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DE L'OBJET.

### Nécessité de ce rappel.

437. Les procédés mnémoniques que nous venons d'indiquer (432) nous permettent, comme nous l'avons dit, de rapporter facilement les signes à leurs objets respectifs, mais ils ne nous rappellent ces objets que par l'intermédiaire de leurs noms; et, le plus souvent, ils ne nous disent rien touchant leurs *propriétés*. Or, il est bien évident que l'emploi qu'on fera des signes, que les raisonnements auxquels on les soumettra dépendront précisément de ces propriétés mêmes. Nous devrons donc en avoir constamment quelques-unes, au moins, présentes à l'esprit.

Parmi les divers avantages des bons signes, l'un des principaux est de soulager notre mémoire, de lui venir en aide. Il faudra donc *que tout signe,* pour être bon, *nous rappelle,* d'une façon et dans une mesure convenables, *les propriétés de son objet.*

### Rappel direct.

438. Certains signes ne nous rappellent point leurs objets par l'intermédiaire des noms; ils nous montrent ces objets eux-mêmes; ils en sont de petites images, appartenant ainsi, suivant l'expression consacrée, à la *pictographie*, c'est-à-dire au mode de représentation qui se trouve à l'origine de toutes les écritures. Tels sont les petits signes, cités plus haut (381, 412), employés pour représenter un angle, deux perpendiculaires, deux parallèles, un cercle, un triangle, un carré, etc., etc.

439. Il existe d'autres signes, qui ne sont pas des images, qui

n'en peuvent pas être, et qui cependant rappellent leur *signification* par leur *forme*. Tels sont les premiers chiffres chinois —, =, ≡, et les premiers chiffres romains I, II, III. Tels étaient aussi, dans leur tracé primitif, les neuf chiffres arabes, puisqu'ils consistaient, paraît-il, en lignes brisées présentant respectivement un, deux, trois, ... angles ou côtés.

Les signes d'inégalité $>$, $<$ indiquent d'eux-mêmes qu'on passe d'une quantité plus grande à une plus petite, et réciproquement. Les signes de l'égalité $=$, de l'identité $\equiv$, de l'équipollence $\bumpeq$, expriment évidemment que l'on passe d'une quantité à une quantité égale. Et, pour parler des signes de coordination, une barre verticale ne marque-t-elle pas, naturellement, la séparation; une parenthèse, le groupement des éléments qu'elle enserre; une accolade, la correspondance entre un objet et un groupe d'objets; une flèche droite, une direction; une flèche courbe, un sens de rotation?

440. Certains éléments modificateurs rappellent aussi, par leur *forme*, la *signification* des groupes où ils figurent. Grâce à l'accent circonflexe, on sait que $\widehat{AOB}$ est un angle; grâce au trait courbe ou droit qui les surmonte, on sait que les signes $\overset{\frown}{AB}$ et $\overline{AB}$ représentent respectivement l'arc qui va de A en B et la corde de cet arc : la simple notation AB ne serait point suffisante.

Cet emploi du *modificateur-image* est donc excellent. Malheureusement, il ne peut guère s'étendre. Supposons que l'on veuille, en y ayant recours, distinguer, dans un cercle, le triangle rectiligne AOB du secteur AOB qui lui correspond : il faudrait marquer, au-dessus du groupe AOB, dans le premier cas, un petit triangle; dans le second, un petit secteur : ce serait assez compliqué. Quelques auteurs représentent le triangle par $\overline{AOB}$, ce qui me semble mauvais, et le secteur par AOMB, ce qui exige une explication pour la lettre M. Je proposerai $O, \overline{AB}$ pour le triangle, et $O, \overset{\frown}{AB}$ pour le secteur.

### Signe d'un objet simple.

441. J'appelle *objet simple, signe simple,* tout objet et tout signe qui ne nous offre point différentes parties, séparées les unes

des autres. J'appelle, en particulier, *signe graphique simple* tou signe graphique formé d'*un seul trait*. Il est évident que la simplicité de l'objet doit être rappelée par la simplicité du signe. Tout objet simple, ou regardé comme tel, doit être représenté par un signe simple.

442. Les signes de relation devraient être formés chacun d'un seul trait. Il en est ainsi des signes $>$ et $<$; mais les signes $=$, $\equiv$, $\equiv$, ont le tort de comprendre chacun deux ou trois traits séparés.

Les lettres de l'alphabet latin sont des signes simples car, sauf l'*i* et le *j*, elles sont toutes formées d'un trait unique : chacune d'elles pourra donc être choisie pour le signe d'un objet simple. Parmi les majuscules grecques, il en est deux qu'on ne pourrait choisir : ce sont les lettres $\Theta$ et $\Xi$ qui se composent, la première de deux, la seconde de trois éléments séparés.

Les signes du zodiaque devraient tous aussi être simples; il en est quatre qui se composent chacun de deux parties séparées : l'écrevisse, la balance, le verseau et les poissons.

443. La caractéristique d'une fonction est un objet simple; son signe doit donc être simple. Voilà pourquoi nous avons conseillé (227) de lier ensemble toutes les lettres mnémoniques dont nous le composons. Le centre de gravité, le plus grand commun diviseur, le plus petit commun multiple, malgré la complexité de leurs noms, sont des objets simples; il faudrait donc, quand on les représente par cdg, pgcd, ppcm, lier entre elles les trois ou quatre lettres dont ces groupes sont composés; il faudrait remplacer chacun d'eux par un véritable monogramme.

### Signe d'un objet complexe.

444. Tout *objet* comprenant *plusieurs* parties distinctes est pour nous un *objet complexe*. Tout *signe* comprenant *plusieurs* parties séparées est de même un *signe complexe*. Il faut évidemment que tout objet complexe, ou regardé comme tel, soit représenté par un signe complexe.

445. Le produit, seulement indiqué, de deux ou plusieurs fac-

teurs, est un objet complexe; il ne faut donc point, dans l'écriture, lier entre elles les lettres qui représentent ces facteurs. Un nombre, écrit en chiffres, est aussi un objet complexe; ses chiffres doivent donc être séparés les uns des autres. D'une manière générale, *lorsqu'on écrit une expression, une équation, une relation mathématique quelconque, les signes simples qu'on y emploie ne doivent jamais être liés entre eux.*

446. L'objet complexe et, par conséquent, son signe peuvent, d'après le nombre de leurs éléments, être dits *doubles, triples, quadruples,* .... Il est clair que, si l'objet est double, triple, quadruple, ..., son signe doit l'être aussi. En d'autres termes, *il faut que le nombre des éléments du signe soit le même que celui des éléments de l'objet.* C'est justement ce qui a lieu, dans notre écriture mathématique, pour les produits de facteurs littéraux; pour les nombres écrits en chiffres; etc., etc.

Le terme général d'une table à double entrée sera donc représenté par un signe double, $(p, q)$ par exemple; celui d'une table à triple entrée, par un signe triple $(p, q, r)$, .... Il en sera de même pour les variantes à deux, trois, quatre, ... indices.

Rien de plus commun que l'emploi des signes multiples. Nous pouvons citer comme tels : les lettres accentuées ou affectées d'indices, $a'$, $a''$, ..., $b_1$, $b_2$, ...; les notations usuelles $dx$, ..., $\Delta x$, ... des différentielles et des différences; celles des fonctions $f(x)$, $f(x, y)$, ...; etc., etc.

### Structure.

447. Non seulement les éléments du signe complexe doivent être en même nombre que ceux de l'objet, mais ils leur doivent correspondre chacun à chacun; ils en doivent rappeler les propriétés et les positions relatives. Pour employer un mot qui se comprendra de lui-même, nous dirons que, dans l'écriture des Mathématiques comme dans celle de la Chimie, *le signe doit avoir la même structure que son objet.*

448. Lorsqu'on se sert de la numération décimale, tout nombre

est décomposé en groupes d'unités des divers ordres, dont aucun n'en contient plus de neuf. On y considère même, pour la régularité, des groupes fictifs qui n'en contiennent aucune. A ces différents groupes, soit réels, soit fictifs, correspondent évidemment, chacun à chacun, les différents chiffres du nombre écrit; ils leur correspondent dans le même ordre : objet et signe ont même structure.

449. L'écart entre deux éléments du signe doit rappeler, par sa grandeur ou sa petitesse, l'écart existant entre les éléments correspondants de l'objet. Voilà pourquoi nous avons recommandé (154) de rapprocher beaucoup l'un de l'autre : dans un monome tel que $5a$, le coefficient de la lettre qui le suit; dans le produit $ab$ de deux facteurs littéraux, ces deux facteurs eux-mêmes; dans les notations $\sin x$, $\log x$, la caractéristique de la variable.

450. Comme nous le verrons dans notre troisième Partie, c'est surtout dans l'écriture des expressions algébriques, des équations, des relations de tout genre, qu'il faudra se préoccuper des questions de structure. Lorsque la structure du signe est parfaite, on en comprend, on en pénètre immédiatement la composition; l'écriture mathématique devient infiniment claire et, pour ainsi parler, limpide, transparente.

### Symétrie et dissymétrie.

451. La notion de structure suppose complexes et l'objet et le signe. Mais il en est deux autres, qu'il importe de rappeler, et qui se rapportent, non seulement aux signes et objets complexes, mais encore aux signes et objets simples. Ce sont les notions de *symétrie* et de *dissymétrie*.

452. *La symétrie ou dissymétrie qui existe, soit dans une relation, soit dans une opération, doit toujours être rappelée par le signe.*

La symétrie des relations est rappelée, comme il convient, par les signes d'égalité, d'identité, d'équipollence, qui sont tous symétriques de droite à gauche. La dissymétrie est rappelée de même

par les signes $>$ et $<$, c'est-à-dire par les signes simples d'inégalité.

Comme nous l'avons fait remarquer déjà, la somme et le produit de deux nombres dépendent symétriquement de ces nombres. Le signe de l'addition et celui de la multiplication doivent donc présenter, à droite et à gauche, des parties symétriques : c'est ce qui a lieu : pour le signe $+$; pour le signe $\times$, et pour le point qui parfois le remplace. Le signe $-$ de la soustraction et le signe $\frac{\cdot}{\cdot}$ de l'exponentation, qui sont symétriques, devraient ne pas l'être, puisque leurs opérations ne le sont pas. Quant à la division de $a$ par $b$, qui est une opération dissymétrique, elle s'indique tantôt par $\frac{a}{b}$, tantôt par $a : b$, et il est évident que la seconde de ces notations a le tort d'être symétrique.

453. Ce que nous venons de dire touchant les opérations et relations symétriques ou dissymétriques s'étend, d'ailleurs, à tous les objets et à tous les signes. C'est une règle générale : *tout objet symétrique doit être représenté par un signe symétrique; tout objet dissymétrique, par un signe dissymétrique.* — Cette règle générale, comme celle de la structure, trouvera surtout son application dans notre troisième Partie, pour l'écriture des expressions, équations, relations.

### Objet regardé comme simple, comme complexe.

454. On a pu le remarquer : nous avons parlé précédemment d'*objet simple,* ou *regardé comme simple* (441); d'*objet complexe,* ou *regardé comme complexe.* Nous pouvons, en effet, regarder un même objet tantôt comme simple, tantôt comme complexe, suivant les circonstances où nous l'envisageons.

455. Un nombre considéré comme une collection d'unités simples est un ensemble homogène, analogue à un tas de sable; c'est un objet simple. Si nous le supposons formé de groupes d'unités des divers ordres, c'est un objet complexe. Nous disons, dans le premier cas, le nombre $n$; dans le second, par exemple, le nombre 3725.

Si un seul angle a son sommet en A, on pourra l'appeler l'angle A. Si plusieurs angles ont leur sommet en ce même point, et qu'on ne puisse mettre de lettre ou de chiffre en leur intérieur, on désignera chacun d'eux par un groupe de trois lettres, où A occupera la place du milieu. L'angle, qui était désigné d'abord par un signe simple, le sera maintenant par un signe triple.

Considérons un segment de droite. Si nous ne nous occupons que de sa longueur, nous le désignons par $l$ : c'est un signe simple. Si nous voulons indiquer les deux points qui le comprennent, nous les désignons par A et B et nous représentons le segment par AB : c'est un signe double. Si nous donnons un sens à ce segment, nous pouvons, pour l'indiquer, placer au-dessus de AB une flèche horizontale, ayant sa pointe à droite ou à gauche : c'est un signe triple. Mais il est alors infiniment plus commode de ne marquer aucune flèche, et d'indiquer le sens par l'ordre des deux lettres; de représenter par AB le segment pris de A en B, et par BA le même segment pris en sens contraire. D'après les conventions consacrées, la première des deux lettres désigne l'origine du segment; la seconde en désigne l'extrémité.

456. Chasles a eu, selon nous, une idée de génie lorsqu'il a imaginé d'indiquer ainsi le sens d'un segment par l'ordre des lettres. Cette notation a les plus grands avantages. C'est grâce à elle, quand on considère les points A, B, C, D, ..., L, pris à volonté sur une droite, que l'on peut écrire, pour ainsi dire mécaniquement, la belle identité

$$AB + BC + CD + \ldots + LA = 0.$$

Il est, d'ailleurs, évident que l'on peut étendre cette considération de l'ordre des lettres à la notation des angles, et écrire $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA}$ pour un même angle, pris d'abord en un sens, ensuite dans le sens opposé.

457. Les signes multiples, en particulier les signes doubles, sont souvent, pour la désignation des objets, plus avantageux que ne le sont les signes simples. Supposons plusieurs variables $x$, $y$, $z$, ..., à chacune desquelles on donne un accroissement. On peut désigner ces accroissements respectifs par les signes simples $h$, $k$, $l$, ..., ou

par les signes doubles $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, .... Ces derniers expriment d'eux-mêmes à quelles variables les différents accroissements se rapportent; c'est une propriété précieuse, toutes les fois que le nombre des variables n'est pas très petit. Dans cet exemple, la supériorité du *signe double* est évidente : elle provient de ce qu'il y possède une *vertu mnémonique supérieure*.

### Rappels nécessaires.

458. Il n'est pas nécessaire que le signe d'un objet en rappelle toutes les propriétés; mais il est indispensable qu'il rappelle toutes celles d'entre elles qui interviennent dans la question à étudier. En d'autres termes, le signe devra rappeler *toutes* celles des propriétés de l'objet qui nous pourront être *utiles*.

459. En tel théorème de Géométrie se rencontrent à la fois des éléments mobiles et des éléments fixes. Toute la difficulté de la démonstration consiste souvent à se bien rappeler quels sont les uns, quels sont les autres. Il faudra donc que le signe de chaque élément en rappelle la mobilité ou la fixité. On représentera ainsi par M et A une droite mobile et une droite fixe; par $m$ et $a$ leurs pôles respectifs. Il faudra éviter tout ce qui pourrait amener des confusions; et se garder, par-dessus tout, des notations qui pourraient donner des idées fausses.

Si plusieurs nombres sont écrits en chiffres dans des systèmes de numération différents, on devra, pour chacun d'eux, indiquer la base du système. On la mettra, par exemple, en indice : $3254_8$ sera ainsi un nombre écrit dans le système octaval.

On connaît tous les avantages que l'on retire de l'emploi des signes + et — pour l'indication des deux sens d'une même direction, d'une même rotation. C'est grâce à eux que les formules, celle par exemple du mouvement uniforme, deviennent précises et tout à fait générales. La confiance que nous avons dans la généralité qu'ils apportent nous conduit même à n'établir ces formules que dans un seul cas, nous dispensant ainsi des longues énumérations et discussions. On distingue ces deux sens, que l'on caractérise par les signes + et —, dans les longueurs, les temps, les angles, les rota-

tions, les aires, les volumes. Il faut absolument que le signe de l'objet susceptible de deux sens nous rappelle celui de ces sens qui lui est attribué.

Nous avons vu comment on rappelait l'origine, l'extrémité et le sens d'un segment. Il faudra rappeler pareillement la grandeur, la direction et le sens, dans les forces, les vitesses, les accélérations; en un mot dans tous les vecteurs et quantités dirigées.

460. Il faut, d'ailleurs, lorsqu'on choisit un signe, le *définir toujours avec le plus grand soin,* c'est-à-dire en faire connaître toujours, avec le plus grand soin, la *signification* et l'*étendue*. La signification devra être précise; l'étendue, nettement délimitée. Il faudra indiquer : si telle lettre représente une quantité prise en valeur absolue, ou prise avec l'un des signes $+$ ou $-$; si telle autre représente une imaginaire complète, ou seulement son module, ou seulement sa partie réelle. On ne dira pas $n$ nombres entiers, consécutifs, croissants à partir de $k$, ce qui présenterait une certaine ambiguïté; mais $n$ nombres entiers, consécutifs, croissants, dont le premier est $k$. Si l'on représente par $(a, b)$ l'intervalle où la variable est assujettie à demeurer, il faudra dire si cette variable peut prendre l'une des valeurs limites, ou toutes les deux, ou ne peut prendre ni l'une ni l'autre. Les adverbes inclusivement, exclusivement, les signes doubles $\leq, \geq$, employés en pareil cas, ont toujours pour effet d'augmenter la clarté et la précision. Parmi les nombreux mérites qui appartiennent à Cauchy, on doit placer en première ligne celui d'avoir soutenu constamment la nécessité de rendre les signes très précis, d'en définir bien exactement l'*étendue* et la *signification*.

### Rappels superflus.

461. Le signe, avons-nous dit (437), doit rappeler tout ce qu'il nous est utile de savoir de la nature et des propriétés de son objet. Par contre, il ne doit rien nous rappeler d'inutile. En deux mots, *il faut que le signe dise le nécessaire, taise le superflu*.

462. Est-il nécessaire, dans un problème ordinaire de Mécanique, de marquer, par un modificateur quelconque, qu'on prend pour

unité de temps la seconde sexagésimale? A mon sens, il ne faut même pas que l'énoncé contienne ce mot.

Si le double signe $\pm$ figure dans un calcul, faut-il l'y écrire constamment? Ne vaut-il pas mieux, comme on le fait souvent, le remplacer dès le commencement par une lettre unique, $\varepsilon$ par exemple, sauf à remplacer à son tour, tout à la fin, cette lettre unique par le double signe?

Si, dans le cours d'un calcul, pendant un certain temps, on n'a nul besoin de considérer la valeur numérique d'un nombre, n'a-t-on pas raison, au lieu de l'écrire constamment en chiffres, de le représenter, pendant tout ce temps, par une simple lettre?

Si une expression, tant soit peu compliquée, ne subit aucune modification dans une ou plusieurs des phases successives d'un calcul algébrique, pourquoi l'y reproduire constamment telle quelle? N'est-il pas plus avantageux, au lieu de l'y écrire *in extenso*, de l'y remplacer, pendant tout ce temps encore, par une lettre unique?

463. Les signes doubles et, plus généralement, les signes complexes, triples, quadruples, ... nous présentent cet avantage qu'on y peut substituer un élément à un autre de façon à rappeler, par les changements du signe, les modifications qui se sont produites dans l'objet. La fonction $f(x)$ prend ainsi les valeurs $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ quand on y substitue successivement $a$, $b$, $c$ à la place de $x$. Si l'on fait ces substitutions, il est nécessaire de représenter la fonction par $f(x)$; si on n'en fait aucune, il suffit de la représenter par $f$. C'est donc ici la considération de l'usage qu'on en fera qui devra déterminer le choix du signe.

Pour démontrer que deux équations à une inconnue sont équivalentes, on établit que toute racine de l'une est racine de l'autre, et réciproquement; on fait des substitutions : on devra donc écrire ces équations sous les formes

$$f(x) = 0, \qquad g(x) = 0.$$

Pour démontrer que deux équations à deux variables sont équivalentes, on établit de même que toute solution de la première est solution de la seconde, et réciproquement : on devra donc écrire ces équations sous les formes

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0.$$

Mais, si l'on n'avait aucune substitution à effectuer, il serait inutile d'employer ces notations complexes; on réduirait, dans chaque cas, les premiers membres de ces équations aux simples lettres $f$, $g$.

464. Il est toujours mauvais d'embarrasser, de compliquer le signe, en lui faisant exprimer *trop de choses*. Ne lui faire dire que le *strict nécessaire*, c'est le moyen de l'abréger, de le simplifier, d'augmenter, par conséquent, la brièveté, la netteté, la clarté des raisonnements et des écritures. En Arithmétique, on raisonne souvent, dans la démonstration des théorèmes, sur des nombres particuliers écrits en chiffres; malgré les apparences, les démonstrations n'y perdent rien de leur généralité; mais combien, par ces valeurs numériques remplaçant les lettres qu'on pourrait employer, ne deviennent-elles pas plus lourdes, plus compliquées, plus difficiles à suivre! On connaît, au contraire, tous les avantages que retire l'Algèbre de la représentation des nombres par de simples lettres; tous ceux que retire la Géométrie analytique de l'emploi, imaginé par Plücker [1], des équations non développées.

---

[1] Né en 1801, mort en 1868.

# CHAPITRE IV.

## RAPPEL DES RAPPORTS ENTRE LES OBJETS.

### Généralités.

465. Considéré en lui-même, isolément, tout objet nous présente un certain nombre de propriétés. Le signe de cet objet doit nous rappeler toutes celles de ces propriétés qui peuvent nous être utiles dans notre étude ou recherche. C'est ce que nous avons expliqué en détail dans le Chapitre précédent.

Considérés ensemble, comparés les uns aux autres, des objets différents en nombre quelconque nous présentent toujours entre eux des ressemblances, des analogies, des différences, des oppositions, en un mot *des rapports de tout genre,* ce terme de rapport étant pris, non pas dans le sens très précis qu'on lui attribue en Mathématiques, mais dans le sens général et, par conséquent, un peu vague qu'on lui donne en Philosophie. A ces *rapports entre les objets* devront correspondre, *entre leurs signes, des rapports de même nature;* et ces rapports entre les signes devront être, en quelque sorte, des *images fidèles* des rapports entre les objets, afin de suffire toujours à nous *les rappeler.*

### Objets analogues; objets disparates.

466. Soient deux objets figurant dans une même étude ou recherche mathématique. Il se peut que ces objets nous offrent, l'un avec l'autre, une ressemblance telle que nous soyons immédiatement portés à les rapprocher, cette ressemblance tenant, d'ailleurs, à leur nature, à leur forme, au rôle qu'ils jouent, etc., etc. On pourrait dire : lorsqu'ils possèdent la même nature, qu'ils sont

homogènes; lorsqu'ils présentent la même forme, qu'ils sont semblables; lorsqu'ils jouent le même rôle dans la question, qu'ils y entrent symétriquement; etc., etc. Mais ces différents mots sont déjà usités en Mathématiques; ils y possèdent chacun une signification nettement définie; leur emploi introduirait, dans nos raisonnements, des distinctions et une précision gênantes. Nous dirons simplement, dans tous les cas, que ces objets si ressemblants sont des objets *analogues*.

467. Il peut arriver, au contraire, que les deux objets considérés nous paraissent immédiatement si différents entre eux que nous soyons portés aussitôt à les éloigner l'un de l'autre. Les différences qui les séparent, qui les opposent, peuvent provenir aussi de leur nature, de leur forme, du rôle qu'ils sont appelés à jouer. On pourrait donc, suivant les cas, dire que ces objets sont hétérogènes, dissemblables, dissymétriques; mais ces mots seraient trop précis. Les adjectifs distincts et différents conviendraient à tous les cas; mais ils seraient insuffisants, car ils exprimeraient seulement que les deux objets ne sont point confondus, ne sont point identiques. Faisant usage d'un mot très expressif, quoique peu usité, nous dirons que ces deux objets sont deux objets *disparates*.

468. Il est bien clair que nos deux objets ne sont pas toujours aussi rapprochés ou aussi éloignés que nous venons de le supposer. Nous dirons néanmoins toujours que ces deux objets sont analogues ou disparates. Les raisons qui nous leur feront appliquer l'une ou l'autre de ces épithètes devront toujours être tirées de l'étude attentive de l'énoncé du problème, et de la comparaison simultanée de tous les objets qui y peuvent figurer.

### Signes analogues; signes disparates.

469. Il semble tout naturel, lorsque l'on passe des objets aux signes qui les représentent, d'étendre à ceux-ci les qualifications imaginées pour ceux-là. C'est ce que nous ferons. Nous dirons que deux signes voisins sont *analogues*, que deux signes éloignés sont *disparates*. Et nous pourrons ainsi énoncer les deux règles sui-

vantes, qui sont strictes et doivent être constamment observées :

*Deux objets analogues doivent toujours être représentés par deux signes analogues;*

*Deux objets disparates doivent toujours être représentés par deux signes disparates.*

470. La seconde de ces règles est évidemment très facile à appliquer. Elle semble ne demander aucune attention. Nous avons cependant une telle habitude de certaines notations qui pêchent contre elle, que nous l'enfreignons souvent, pour ainsi dire à notre insu. C'est ce que nous faisons, par exemple, lorsque nous écrivons l'équation de la ligne droite sous la forme

$$y = ax + b,$$

car nous représentons alors par les deux signes analogues $a$ et $b$ deux objets tout à fait disparates, deux objets qui, au point de vue géométrique, ne sont seulement pas du même degré : un nombre et une longueur.

471. La première de nos deux règles exige, au contraire, une attention réelle. Mais le précepte, donné plus haut (437), de choisir des signes rappelant les propriétés de leurs objets, en facilite beaucoup l'application. Conformément à ce précepte : deux objets analogues simples seront représentés par deux signes simples; deux objets analogues complexes, par deux signes complexes; .... C'est là, dans chacun de ces cas, un commencement d'analogie; mais ce n'est qu'un commencement. Deux signes, en effet, peuvent être simples sans être analogues, car il faudrait pour qu'ils le fussent qu'ils nous présentassent, en quelque sorte, un même genre de simplicité; deux signes, *a fortiori,* peuvent être complexes sans être analogues, car il faudrait qu'ils nous présentassent un même genre de complexité; qu'ils nous offrissent la même structure; .... On aurait grand tort de regarder cette première règle comme une simple conséquence du précepte que nous venons de rappeler.

472. En résumé, le *rapport entre deux signes* quelconques doit toujours être de même nature que le *rapport entre leurs objets;* il en doit toujours être une *image fidèle.* Voilà une condition essen-

tielle, qui ne peut souffrir aucune exception. Ce qu'il faut éviter avant tout, c'est que le rapport entre les deux signes ne rappelle un rapport différent de celui qui existe entre les deux objets; que deux objets analogues soient représentés par deux signes disparates; ou, au contraire, deux objets disparates par deux signes analogues. Il est bien clair que des signes entachés d'un pareil vice feraient forcément naître des idées erronées, des idées fausses : ce seraient des signes menteurs.

### Sortes d'objets.

473. Des objets en nombre quelconque, considérés dans une même question, peuvent nous présenter des propriétés communes de nature telle que nous nous sentions spontanément portés à les rapprocher, à les réunir. Nous disons alors que ces objets sont de *la même sorte;* qu'ils constituent une *sorte d'objets*.

Ce mot *sorte* ne paraîtra peut-être pas à tous le meilleur qu'on eût pu choisir; certains penseront qu'on eût dû lui préférer l'un des mots *ensemble, classe, espèce, groupe;* mais ces quatre mots avaient pour nous un défaut rédhibitoire, celui d'appartenir déjà, tous les quatre, à la terminologie mathématique, et d'y posséder chacun un sens propre, bien déterminé.

474. Les objets d'une même sorte sont évidemment analogues deux à deux, ce mot *analogue* conservant le sens que nous lui avons attribué. Mais des objets peuvent être analogues, même deux à deux, sans former une sorte. Il faudrait, en effet, pour qu'ils en formassent une, que l'analogie existant entre les deux objets de chaque couple fût la même pour tous les couples.

Lorsqu'il ne s'agit que de deux objets, on peut dire, au contraire, indifféremment, que ces deux objets sont analogues, ou qu'ils sont de la même sorte : ces deux locutions sont alors tout à fait équivalentes.

475. Les objets considérés dans une même question ne sont pas toujours de la même sorte; ils forment d'ordinaire, en se réunissant d'après leurs analogies, des sortes différentes en nombre variable. Les éléments d'un polygone se partagent évidemment en deux

sortes : les côtés et les angles. Ceux d'un polyèdre, en trois : les faces, les arêtes et les angles solides.

Il peut arriver que l'un des objets considérés ne soit analogue à aucun des autres. Conformément à l'esprit de généralisation qui domine tout le langage mathématique, nous dirons que cet objet, à lui seul, constitue une sorte. Dans un triangle inscrit à un cercle, nous pourrons dire ainsi qu'il existe trois sortes d'objets : les côtés, les angles, le cercle circonscrit.

### Sortes de signes.

476. La notion de sorte, dans les termes où nous venons de la définir (473) pour les objets, s'étend évidemment d'elle-même aux signes qui les représentent. Il y aura des *sortes de signes* comme il y a des *sortes d'objets*.

477. *Aux objets constituant une sorte d'objets devront toujours correspondre des signes constituant une sorte de signes;*

*Aux objets constituant deux sortes différentes d'objets devront toujours correspondre des signes constituant deux sortes différentes de signes.*

Ces règles sont évidemment des règles strictes qui doivent toujours être observées.

478. Nous les énoncerons souvent de cette nouvelle manière qui, au fond, n'est peut-être pas très correcte, mais qui nous paraît naturelle et qui est un peu plus brève :

*A une sorte d'objets devra toujours correspondre une sorte de signes;*

*A deux sortes différentes d'objets devront toujours correspondre deux sortes différentes de signes.*

479. Il serait très mauvais que des objets d'une même sorte fussent représentés par des signes de deux ou plusieurs sortes différentes; et, réciproquement, que des objets de différentes sortes fussent représentés par une seule sorte de signes. Si mauvais que

soient ces modes de représentation, ils ne sont cependant point rares. Les Livres et même les Mémoires nous en présentent une multitude d'exemples. Bientôt nous en citerons bon nombre.

480. Quoi qu'il en soit, les règles qui précèdent entraînent cette conséquence immédiate : les objets considérés dans une même question étant distribués en sortes, et les signes qui les représentent satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer, *les sortes d'objets et les sortes de signes se correspondront chacune à chacune; elles seront en même nombre; le système entier des signes sera une image fidèle du système entier des objets.*

Il y aura, en général, dans un système d'objets, moins de sortes que d'objets; mais il pourrait arriver qu'il y en eût juste autant, chaque sorte d'objets se composant d'un objet unique. Il en sera de même dans les systèmes de signes. Quels que soient d'ailleurs les systèmes, c'est par le nombre des sortes qu'ils contiennent, que nous les caractériserons.

481. Un système d'objets, un système de signes sera pour nous : un système simple, lorsqu'il n'en contiendra qu'une sorte; double, triple, quadruple, ..., lorsqu'il en contiendra deux, trois, quatre, .... Et comme, d'ailleurs, la notion de sorte pourra encore s'étendre aux expressions et aux équations, nous pourrons aussi parler, pour les équations et les expressions, de systèmes simples ou multiples. C'est ce que nous ferons souvent dans notre troisième Partie.

### Correspondances entre les sortes.

482. Deux sortes d'objets, compris dans un système unique, tantôt nous offrent le *même nombre* d'objets, tantôt nous en offrent des *nombres différents*. En tout polyèdre, les sommets et les faces constituent deux sortes d'objets : dans le tétraèdre, il y a 4 sommets et 4 faces; dans le cube, 6 faces et 8 sommets.

483. Quand les objets sont en même nombre dans les deux sortes, ils peuvent se correspondre chacun à chacun; mais il arrive fréquemment qu'ils ne se correspondent point. Dans un polygone con-

vexe, d'un nombre impair de côtés, les côtés et les angles opposés forment deux sortes d'objets : ces objets sont en même nombre et se correspondent respectivement. Dans une équation algébrique de degré $m$, où le premier coefficient est l'unité et où les autres sont représentés par des lettres, ces derniers forment une sorte d'objets et les racines de l'équation en forment une autre; ces objets sont en même nombre $m$ dans les deux sortes; mais ils ne se correspondent nullement, chaque coefficient dépendant symétriquement de toutes les racines et ne se rapportant spécialement à aucune d'elles.

Il est bien évident que, si dans un problème quelconque figuraient toutes les racines de l'équation précédente, mais ne figurait qu'un seul de ses coefficients littéraux, les $m$ racines d'une part, le coefficient unique de l'autre, constitueraient deux sortes d'objets. On pourrait dire que l'objet unique correspond à l'ensemble de tous les autres.

484. Au lieu de considérer simultanément, dans le système qu'on étudie, deux sortes seulement d'objets, on en pourrait considérer trois, quatre, ..., les objets contenus en chacune d'elles pouvant être d'ailleurs en nombres quelconques, égaux ou inégaux. Il faudrait examiner aussi quels genres de correspondances existent entre ces diverses sortes prises deux à deux, trois à trois, ..., ou même toutes ensemble.

485. Les signes devront reproduire ou, du moins, *rappeler* tout ce que nous auront appris les *comparaisons* entre les différentes sortes d'objets du système qu'on étudie. En particulier, ils devront rappeler si les objets constituant deux ou plusieurs sortes se correspondent ou ne se correspondent point; ils devront même, lorsqu'il existe une correspondance, en montrer nettement la nature; ils devront montrer si les objets se correspondent chacun à chacun; ou si un objet unique correspond à plusieurs, et, dans ce dernier cas, s'il leur correspond symétriquement.

### Représentation des sortes d'objets.

486. Comme nous l'avons vu, pour représenter les quantités ou nombres indéterminés, les points, les lignes, les surfaces, les forces,

les espaces, les vitesses, les accélérations, etc., etc., on se sert surtout, dans les Mathématiques actuelles, des lettres de l'alphabet. On peut prendre, d'ailleurs, des lettres latines ou grecques, majuscules ou minuscules, rondes, gothiques, .... On peut employer ces lettres telles quelles, ou bien les affecter soit d'indices, soit d'accents.

487. Comment représenterons-nous *deux objets analogues? Par deux lettres consécutives* appartenant à une même variété d'un même alphabet : par exemple $a$ et $b$; $\mu$ et $\nu$. — Comment représenterons-nous *deux objets disparates? Par deux lettres, non correspondantes,* appartenant à deux alphabets différents, ou à deux variétés d'un même alphabet; ou bien simplement par deux lettres, prises dans une même variété, mais *assez éloignées* l'une de l'autre, par exemple $a$ et $k$.

Deux objets analogues pourront se représenter aussi par $a_1$ et $a_2$, par $a'$ et $a''$. Pour nous, $a$ et $a'$ ne seront point deux signes *analogues;* $a$ et $a_1$ n'en seront pas *non plus*. La différence entre $a$ et $a'$, entre $a$ et $a_1$ est, à nos yeux, beaucoup plus grande que la différence entre $a'$ et $a''$, entre $a_1$ et $a_2$. La lettre $a$, sans accent ni indice, se doit toujours rapporter à un *objet plus important*.

488. Nous représenterons les objets constituant *une sorte* par des *lettres consécutives,* appartenant à une même variété d'un même alphabet, par exemple

$$a, b, c, \ldots; \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots.$$

Ce mode d'opérer est excellent; il doit être préféré à tout autre lorsque le nombre des objets est assez petit.

Lorsqu'il est grand, on doit se servir d'une même lettre affectée d'indices ou d'accents consécutifs, par exemple

$$a_1, a_2, a_3, \ldots; \quad a', a'', a''', \ldots.$$

On pourrait même employer la suite 1, 2, 3, ... des nombres entiers, qui seraient regardés alors comme les numéros des objets.

Mais, d'après ce que nous venons de dire sur la présence et l'absence des *indices* et des *accents,* les deux suites

$$a, a_1, a_2, \ldots; \quad a, a', a'', \ldots$$

seraient également *fautives*. Elles ne deviendraient correctes que dans des cas singuliers, tout à fait exceptionnels, dont nous donnerons plus tard des exemples.

489. Les objets constituant une sorte : tantôt se refusent à être mis les uns à la suite des autres dans un ordre quelconque; tantôt demandent, pour ainsi dire d'eux-mêmes, à être ainsi placés, ordonnés. Des points, situés d'une manière quelconque dans l'espace, ne sont susceptibles d'aucun ordre; les sommets d'un polygone, au contraire, doivent se succéder dans l'ordre où on les trouve lorsqu'on parcourt le polygone. En désignant ces objets, dans tous les cas, soit par les lettres consécutives d'un alphabet, soit par des lettres affectées d'accents ou d'indices, soit même par des nombres entiers, nous les représentons par des signes qui portent en eux-mêmes l'indication d'un certain ordre. Cette notation est donc tantôt excellente, tantôt fautive.

### Représentation des correspondances.

490. Il est, en général, assez facile de faire passer dans les signes les *correspondances* qui existent entre les objets de deux sortes. Dans le cas le plus simple, celui où ces objets sont en même nombre et se correspondent chacun à chacun, si les objets de la première sorte sont représentés par $a$, $b$, $c$, ..., on représentera ceux de la seconde par A, B, C, ...; ou par les mêmes lettres affectées d'un seul accent $a'$, $b'$, $c'$, ...; ou par ces mêmes lettres affectées d'un seul indice, $a_0$, $b_0$, $c_0$, ....

On pourrait aussi se servir des lettres correspondantes d'un autre alphabet; on utiliserait de préférence celles de l'alphabet grec, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... Il est à remarquer à ce propos que l'alphabet latin et l'alphabet grec nous présentent des groupes de lettres consécutives qui se correspondent parfaitement : au commencement, les groupes $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$; au milieu, les groupes $l$, $m$, $n$ et $\lambda$, $\mu$, $\nu$. On emploie, d'ailleurs, couramment, comme s'ils se correspondaient très bien, les groupes $f$, $g$, $h$ et $\varphi$, $\chi$, $\psi$; les groupes $x$, $y$, $z$ et $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

491. Si les objets de la première sorte étaient représentés par

$a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., ou $a'$, $a''$, $a'''$, ..., ceux de la seconde devraient l'être : soit par $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... ou $A'$, $A''$, $A'''$, ...; soit par $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... ou $b'$, $b''$, $b'''$, ...; soit par $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... ou $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$, .... On trouve à chaque instant les deux séries

$$\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \ldots, \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \ldots, \end{array}$$

qui se correspondent terme à terme.

Il serait *très mauvais,* selon nous, que, les objets de la première sorte étant représentés par des *lettres différentes,* ceux de la seconde le fussent par *une même lettre affectée d'accents ou d'indices;* qu'au groupe $a$, $b$, $c$, par exemple, correspondît le groupe $m'$, $m''$, $m'''$, ou le groupe $m_1$, $m_2$, $m_3$.

492. Au lieu de deux sortes contenant des objets correspondants en même nombre, on en pourrait considérer trois, quatre ou davantage. On représenterait ces objets par des signes, analogues aux précédents, qui en montreraient les *multiples correspondances.* Dans les tables à double entrée, dans les déterminants, dans les matrices, il existe ainsi des correspondances entre les éléments de deux lignes ou deux colonnes quelconques. C'est l'usage de représenter chaque élément par une lettre affectée de deux indices se rapportant l'un à la ligne, l'autre à la colonne qui se croisent en cet élément. Cet usage est excellent, car il montre bien les correspondances.

On pourrait imaginer des cubes, des parallélépipèdes rectangles, où chaque objet serait représenté par une lettre, affectée de trois indices, qui rendrait manifestes des correspondances encore plus nombreuses. On pourrait même imaginer des systèmes d'objets qui devraient être représentés par des lettres affectées de 4, 5, 6, ... indices : les objets d'une même sorte seraient alors donnés par des signes qui ne différeraient les uns des autres que par un seul de ces indices multiples.

493. Lorsque les différentes sortes d'objets qui composent un système ne comprennent pas toutes le même nombre d'objets, la question des notations devient souvent assez difficile. Les exemples très nombreux et très variés que nous en donnerons dans les Cha-

pitres qui vont suivre nous montreront par quels procédés on parvient, dans la plupart des cas, à surmonter ces difficultés.

### Méthode à suivre.

494. Les anciens géomètres se préoccupaient assez peu du *choix des lettres* par lesquelles ils représentaient les quantités ou marquaient les éléments des figures. Pascal, entre une foule d'autres, semble n'avoir aucun souci (706) des notations : sur son triangle arithmétique ([1]), il met des lettres, tantôt grecques, tantôt latines, sans ordre et comme au hasard. Présentement, on rencontre des mathématiciens qui ne s'en préoccupent guère davantage : j'en ai connu un, professeur éminent, qui prenait dans l'alphabet latin, en le suivant depuis le commencement, les lettres dont il avait besoin, à l'instant où il en avait besoin, établissant ainsi une sorte de correspondance entre l'ordre alphabétique et l'ordre chronologique!

495. Évidemment, quelque question qu'on étudie, il faut représenter par des signes les objets qui y figurent. Il faut de plus, conformément aux règles qui précèdent, que ces signes nous *rappellent,* dans la mesure de notre besoin, les *propriétés* que possèdent leurs objets et les *rapports* qui existent entre eux.

Ce n'est que par un *examen* comparatif des objets à étudier, que par un examen soigneux, minutieux, que nous pouvons nous mettre en état de choisir des signes remplissant ces conditions. Cet *examen* devra toujours précéder ce *choix*.

496. La première opération à effectuer sera une analyse à la Condillac : elle consistera surtout dans l'*énumération bien exacte,* sans omission ni double emploi, des objets figurant dans la question à étudier.

Il faudra ensuite *distribuer ces objets en sortes,* et les distribuer ainsi d'après leur nature, d'après leur rôle, en les considérant en eux-mêmes et non point par rapport à nous. Le fondement de cette distribution devra être objectif et non point subjectif. Comme nous

---

([1]) *Œuvres complètes de Pascal,* in-12, Paris, 1866, t. III, p. 244.

aurons occasion de le voir, dans bon nombre de problèmes il est inutile, sinon nuisible, de distinguer par leurs signes les constantes des variables, et surtout les inconnues des données.

Après avoir comparé les objets entre eux, il faudra comparer entre elles les diverses sortes d'objets. Il faudra voir si les objets composant deux ou plusieurs de ces sortes ne se correspondent pas chacun à chacun ou d'une autre manière quelconque. Il est bien clair que ces *correspondances* établiront de nouveaux modes de *groupement,* de *distribution.*

Par cette étude approfondie du système entier des objets, on arrivera : le plus souvent à une *classification unique;* mais parfois aussi à des *classifications multiples,* pour ainsi dire superposées. *Les signes devront non seulement s'inspirer de ces classifications, mais encore nous les rappeler et, en quelque façon, les reproduire à nos yeux.*

# CHAPITRE V.

## CHOIX DES SIGNES GÉNÉRAUX.

### Les deux grandes espèces de signes mathématiques.

497. Toute recherche mathématique, si peu difficile qu'elle soit, exige qu'on y fasse usage, pour les quantités, pour les calculs, pour les figures, pour une foule d'objets divers, de signes spéciaux plus ou moins nombreux. Ces signes se partagent naturellement en *deux grandes espèces :* ceux qui ne dépendent point de la question à traiter, ceux qui en dépendent. Les premiers restent, pour ainsi dire, les mêmes dans toutes les questions; les seconds changent quand on passe d'une question à une autre. Les premiers sont les signes numériques, les signes d'opération, les signes de groupement, de fonctions, de relations, de rédaction : nous les nommerons *signes généraux;* les seconds sont les signes de quantités et les signes de figures : nous les nommerons *signes particuliers.*

498. Les uns et les autres doivent être choisis conformément aux principes que nous venons de poser; mais le *choix* qu'on en fait ne s'effectue pas toujours dans les mêmes conditions et ne présente pas toujours les mêmes difficultés. Pour les signes généraux, il est, en général, très facile, car il ne demande point qu'on *définisse,* qu'on *étudie,* ni qu'on *classe* au préalable les objets à représenter; pour les signes particuliers, au contraire, le choix est souvent très laborieux, très difficile, parce qu'il exige, presque toujours, que les objets à représenter aient été tout d'abord, très soigneusement, *définis, étudiés* et *classés.*

Pour familiariser nos lecteurs avec l'application des principes que nous venons de rappeler, nous donnerons des exemples, très nom-

breux et très variés, de la façon dont il convient de choisir les signes. Les exemples contenus dans le présent Chapitre se rapporteront aux signes *généraux;* ceux des sept Chapitres suivants, aux *signes particuliers.*

### Choix des signes numériques.

499. Les *signes numériques* sont ceux qui représentent les nombres déterminés, c'est-à-dire les entiers, les fractions ordinaires, les fractions décimales limitées ou illimitées, ainsi que certaines irrationnelles, certaines imaginaires qui se rencontrent fréquemment dans les calculs.

500. Nous n'avons à choisir, pour écrire les *nombres entiers,* ni les chiffres, ni la manière de les assembler. L'idée ne pourrait venir à personne de changer, pour les calculs, ni les figures de nos chiffres, ni les règles de notre numération écrite. Il est vrai qu'on pourrait prendre une autre base; ou utiliser : pour l'étude des nombres, la décomposition en facteurs premiers; pour celle des permutations, la numération factorielle de M. Laisant (12). Ces deux derniers modes de représentation ne demanderaient aucun signe nouveau; mais le choix d'une base supérieure à 10 exigerait que l'on créât de nouveaux chiffres : dans la base 12, il en faudrait créer deux, l'un pour dix, l'autre pour onze : rien n'empêcherait d'y employer les deux premières lettres de l'alphabet grec, $\alpha$ et $\beta$.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer déjà (17), les chiffres romains s'utilisent présentement encore comme numéros d'ordre. Ce serait se priver d'une ressource que de s'astreindre à ne les employer jamais. Seulement, quand on en fera usage, il les faudra prendre sous leurs formes les plus simples, et éviter : d'une part, la lettre *j* qui figure par exemple dans vij; de l'autre, les formes bizarres, telles que IↃC et CIↃ, qui représentent respectivement six cents et mille.

501. L'écriture des *fractions ordinaires* est une écriture consacrée; nous ne saurions la modifier en rien; cependant il nous faudra choisir entre les formes différentes, mais équivalentes, dont

toute fraction est susceptible. Lorsqu'il s'agira d'une fraction isolée, nous aurons soin de la réduire à sa plus simple expression : nous remplacerons, par exemple, au grand avantage de la clarté, $\frac{19}{57}$ par $\frac{1}{3}$. Lorsque nous aurons plusieurs fractions en même temps, nous les réduirons à leur plus petit dénominateur commun, afin de pouvoir facilement les comparer, les ajouter, les retrancher.

502. Les *nombres fractionnaires décimaux* s'écrivent encore d'une façon consacrée, qu'il ne faut point changer. Nous n'avons pas à en choisir le mode de représentation. Notre seul soin doit être de les écrire d'une façon correcte, c'est-à-dire d'y placer une virgule à la droite du chiffre des unités, et de grouper, à l'aide d'intervalles vides, sans virgules ni points, les chiffres de la partie entière, comme ceux de la mantisse.

503. Quant à ces *irrationnelles* ou *imaginaires* qui reviennent à chaque instant dans certains calculs, on les désignera chacune par une lettre, toujours la même. C'est ce qu'on a fait en représentant : le rapport de la circonférence au diamètre par $\pi$; la base des logarithmes népériens par $e$; la racine carrée de $-1$ par $i$. Cette lettre $i$ suffit parfaitement pour ce dernier usage; il semble bien que Bellavitis eût pu se dispenser d'inventer le signe spécial (321) qu'il a nommé *ramuno*.

### Choix des signes d'opérations.

504. Il serait, croyons-nous, très difficile, même en remontant d'un ou deux siècles dans le passé, de trouver des livres où l'*addition* et la *soustraction* fussent indiquées autrement que nous ne les indiquons aujourd'hui. Nos signes $+$ et $-$ sont d'un usage universel; nous n'avons pas à les choisir; nous n'avons qu'à les prendre tels qu'ils sont; et, dans l'écriture, qu'à les former de notre mieux.

505. La *multiplication* peut s'indiquer de trois manières différentes entre lesquelles il nous faut opter : par le signe $\times$; par le point . ; par le simple rapprochement des facteurs. C'est ce dernier mode qu'il faut préférer, toutes les fois qu'il ne résulte de son emploi nul inconvénient, nulle ambiguïté. Le point présente pour

ainsi dire les mêmes avantages. Le signe $\times$ est d'ordinaire beaucoup trop grand; le seul cas où il devienne indispensable est celui où les deux facteurs à multiplier l'un par l'autre sont deux nombres fractionnaires décimaux.

Quant à la *division,* on aura à choisir, pour l'indiquer, entre les deux points superposés et la barre horizontale. Ce dernier mode est le meilleur; le premier est cependant avantageux dans deux cas : lorsqu'il s'agit d'indiquer, au milieu même du texte, la division d'un nombre par un autre; lorsqu'il s'agit d'indiquer, n'importe où, le quotient de deux rapports.

506. On écrivait encore souvent, au commencement du XIX^e siècle, $aa$ pour $a^2$ : je crois bien qu'on ne le rencontre plus nulle part. La notation des *puissances* à l'aide des *exposants* a fini par s'imposer à tous.

Le *radical* s'employait, nous l'avons vu, tantôt avec la barre de groupement, tantôt avec une parenthèse : on l'emploiera toujours avec la barre.

La *racine* $m^{\text{ième}}$ d'un nombre peut s'indiquer soit par un radical pourvu d'un indice, soit par un exposant fractionnaire. Ce second mode apporte dans les calculs beaucoup de régularité, et il facilite grandement la différentiation et l'intégration; il ne faudrait point cependant abandonner l'usage du radical. Peut-être ferait-on bien de le réserver soit pour l'indication de la valeur arithmétique de la racine $m^{\text{ième}}$; soit, plus généralement, pour celle de l'une, plus particulière, de ses $m$ déterminations.

Quant à l'*exponentation,* à la *surpuissance* des différents ordres, à l'*extraction* des racines de racines, ce sont des opérations relativement rares, qui peuvent s'indiquer à l'aide des signes usuels, et pour lesquelles il était tout à fait inutile d'imaginer des signes nouveaux.

### Choix des signes de coordination.

507. Les signes de *coordination* se partagent, nous l'avons vu, en trois espèces principales : les signes de *groupement*, les signes de *séparation,* les signes de *correspondance*. Nous les avons énu-

mérés en détail. Ce sont des signes consacrés, assez nombreux, parmi lesquels, presque toujours, il nous suffira de choisir.

508. Lorsque nous n'aurons pas besoin de superposer des signes de *groupement,* lorsque les expressions à écrire n'en demanderont qu'un, nous prendrons la barre horizontale, ou la parenthèse ordinaire : la barre, si employée autrefois, mériterait de l'être aujourd'hui plus souvent qu'elle ne l'est. Lorsque nous aurons à superposer des signes de groupement, nous devrons, en allant du dedans au dehors, les placer toujours dans cet ordre : barre horizontale, parenthèses, crochets, systèmes d'accolades. Ce n'est que dans le cas où il en faudrait superposer un plus grand nombre, que nous serions forcés de créer des signes nouveaux.

509. On emploiera : pour indiquer la *séparation* de droite à gauche, la virgule, le point-et-virgule, le trait vertical; pour indiquer la *séparation* de haut en bas, le trait horizontal, simple ou double. On pourrait aussi, dans l'un et l'autre cas, laisser, entre les groupes à séparer, des vides plus ou moins grands. Quelques signes de séparation qu'on utilise, il faudra établir entre eux un certain ordre, une certaine hiérarchie qu'on devra constamment respecter.

510. Pour ce qui est des signes de *correspondance :* lignes de points, accolades, traits courbes, traits droits, chacun des trois premiers répond à un besoin particulier et s'impose pour ainsi dire à nous. Il n'y a jamais à hésiter pour l'emploi de la ligne de points, ni pour celui de l'accolade. Ce dernier signe fait correspondre un groupe d'objets à un objet unique. Le trait courbe sert souvent au même usage; mais il peut très bien indiquer seulement que différents objets doivent être pris ensemble, réunis. Le trait droit, excellent comme signe de séparation, est fort médiocre comme signe de correspondance : il ne saurait, en aucun cas, remplacer l'accolade.

511. D'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit (212), il est toujours avantageux, dans le cours d'un calcul, comme dans celui d'une recherche quelconque, de faire un grand usage des différents *signes de coordination.*

### Signes de fonctions.

512. La première chose à faire pour représenter une fonction indéterminée d'une ou plusieurs variables, c'est de *choisir* entre la notation $U_x$, $V_{x,y}$ des *variantes* et la notation $f(x)$, $g(x, y)$ des *fonctions* proprement dites. L'une et l'autre ont leurs avantages. Nous avons même vu (222) qu'il convenait parfois de supprimer toute indication de variable, et de représenter simplement la fonction par U ou par $f$. Nous pourrions, d'ailleurs, au lieu de U ou de $f$, prendre une autre lettre quelconque, latine ou grecque.

513. Les *fonctions déterminées* usuelles, les *fonctions particulières :* exponentielles, logarithmes, fonctions trigonométriques, fonctions elliptiques, possèdent chacune leur mode consacré de représentation. Il faudra l'adopter, sans le modifier. On devra toutefois, en écrivant, lier entre elles les lettres composant les caractéristiques.

Pour représenter une fonction particulière nouvelle, il faudra imaginer une caractéristique nouvelle. On formera cette caractéristique en prenant une, deux, trois des premières lettres du nom de cette fonction, et en liant toujours ces lettres entre elles de façon à en constituer un monogramme. Ce *monogramme* devra être aussi *court* que possible, et *rappeler* toujours le *nom* de la fonction.

514. Nous avons indiqué (231) les différentes manières de représenter les nombres particuliers qui dépendent de certains autres : partie entière d'un quotient, valeur absolue d'une différence, portion réelle d'une imaginaire, etc., etc. On les représente en mettant les nombres d'où l'on part entre parenthèses ou crochets, en les soulignant, en plaçant au-dessus d'eux un petit trait horizontal. On pourrait aussi les faire précéder d'un *signe spécial,* choisi exprès, qui deviendrait alors une véritable *caractéristique.*

515. Lorsque, dans une question ou recherche quelconque, figurent en même temps *plusieurs fonctions* différentes, les signes qui

les représentent cessent pour ainsi dire d'être des signes généraux, pour devenir des signes particuliers, des signes d'objets. Il faut procéder à l'égard de ces fonctions comme nous avons recommandé de le faire à l'égard des objets, c'est-à-dire les étudier, les comparer, les distribuer en différentes sortes, voir les correspondances qui peuvent exister entre les fonctions de deux sortes; en un mot, effectuer une *classification* de ces fonctions.

Ce n'est qu'en s'inspirant de cette *classification*, qu'en cherchant à la faire passer dans les signes, qu'on pourra obtenir d'*excellentes notations*.

### Signes de relations.

516. L'égalité ne possède présentement qu'un seul signe, employé toujours et partout; c'est le signe $=$. Le signe $\propto$ n'a guère survécu à Descartes, et le signe $::$, jadis si employé pour les proportions, est aujourd'hui complètement abandonné.

Il n'existe de même qu'un seul signe, $\triangleq$, d'équipollence; et qu'un seul signe, $\sim$, d'équivalence. Voilà donc trois relations : *égalité, équipollence, équivalence,* pour l'indication desquelles la question du signe à employer ne se pose même pas.

Au contraire, pour l'indication de l'*identité* et pour celle de la *congruence,* les auteurs contemporains sont loin de s'entendre, employant à ces deux usages, et presque indifféremment, les trois signes

$$\equiv, \quad \equiv, \quad \overset{\cdots}{\equiv}.$$

On ferait bien, selon nous, d'abandonner le deuxième, et de réserver : le premier à la congruence, le dernier à l'identité, pour lesquelles, d'ailleurs, ils ont été respectivement imaginés.

517. Les signes simples d'*inégalité*, $>$ et $<$, sont adoptés par tous. Je ne sache même pas qu'on ait jamais proposé de les remplacer par d'autres. Il faut donc les prendre et les employer tels quels.

518. Quant aux signes *négatifs* de relation

$$\not< \quad \neq \quad \not>,$$

ils correspondent chacun à chacun aux signes *positifs doubles*

$$\geqq, \quad , \quad \leqq;$$

ils leur sont respectivement équivalents. On peut choisir à volonté les uns ou les autres. Ce sont, selon nous, les *signes doubles* qu'il convient de préférer.

### Signes de rédaction.

519. Avant de commencer à rédiger un Ouvrage ou Mémoire quelconque de Mathématiques, il est nécessaire d'en *arrêter le plan*, c'est-à-dire de déterminer les différents livres ou parties dont il se composera et l'ordre dans lequel ces livres ou parties se succéderont. Il faudra ensuite partager ces livres en chapitres, et ces chapitres en paragraphes, voire en alinéas.

520. On devra assigner des numéros à ces livres, à ces chapitres, à ces paragraphes; on en devra assigner aussi aux notes placées soit au bas des pages, soit dans les marges extérieures, soit tout à la fin du Volume; on en devra assigner encore aux pages elles-mêmes, aux figures qui accompagnent le texte et aux planches où ces figures peuvent être rejetées. On écrira ces divers numéros, les uns en chiffres arabes, les autres en chiffres romains; on leur donnera des dimensions variées; on les placera, soit sur la ligne principale de l'écriture, soit au-dessus; on pourra les mettre entre parenthèses ou entre crochets; les faire précéder ou suivre d'une demi-parenthèse, initiale ou finale; les affecter d'accents, d'indices, d'astérisques. Au lieu de chiffres, on pourrait aussi se servir de lettres latines ou grecques, majuscules ou minuscules. L'important, c'est que deux numéros de sortes différentes ne puissent jamais être confondus.

521. A ces signes qui marquent les divisions de l'Ouvrage, et à ceux qui permettent d'établir entre elles les correspondances nécessaires, s'ajoutent encore d'autres signes qu'il faudra aussi choisir. On devra souvent, en effet, indiquer que tel paragraphe est très important; que tel autre, à une première lecture, peut être passé; que tel problème énoncé est facile ou difficile. On aura recours,

pour ces diverses indications, à des signes particuliers : lettres, flèches, mains, astérisques simples ou multiples, etc., etc.

522. Les *signes de rédaction* doivent être pris parmi les signes qui nous sont très familiers. On aurait grand tort d'en imaginer de nouveaux. Il les faut choisir avec le plus grand soin. Ce sont, en effet, des signes très importants, qui apportent avec eux beaucoup d'ordre et de clarté. Ils nous rendent, dans la *composition* d'un Ouvrage, les services que nous rendaient, dans le *cours d'une recherche* quelconque, les signes que nous avons appelés signes de *coordination*.

**Résumé.**

523. En résumé, pour certains signes généraux, celui de l'addition, par exemple, la question du choix ne se pose même pas. Pour certains autres, tels que celui de la multiplication, nous n'avons à opter qu'entre des signes connus, au nombre de deux ou trois. Pour d'autres, nous pouvons choisir entre des signes consacrés un peu plus nombreux ; c'est ce qui arrive pour les signes de coordination. Enfin il existe des cas, toutefois assez rares, où nous sommes forcés de créer des signes nouveaux.

524. Nous ne devons *créer* de tels signes que lorsqu'ils sont *indispensables*. Nous ne devons créer de nouveaux *chiffres*, de nouveaux signes de *coordination* ou de *rédaction* qu'après avoir employé tous ceux qui existent. Nous ne devons créer de nouveaux signes de *fonctions*, d'*opérations*, de *relations* que pour des fonctions, des opérations, des relations véritablement nouvelles.

Des *fonctions nouvelles* se présentent d'ailleurs assez fréquemment : le calcul intégral en est une source inépuisable. Tout revient, pour chacune d'elles, à en créer la *caractéristique*. On la formera, nous l'avons déjà dit, en prenant deux ou trois des premières lettres du nom de la fonction et en les liant entre elles.

On n'imagine guère d'*opérations nouvelles*. Cependant on peut citer comme telles l'*exponentation* et les *surpuissances*. Nous avons indiqué plus haut (177) le signe de l'*exponentation;* celui d'une *surpuissance* quelconque n'est qu'un ensemble de radicaux renversés.

Les relations relativement récentes, dont on a dû créer les signes respectifs, sont les relations de *congruence,* d'*équipollence*, d'*équivalence,* d'*identité* et de *similitude*.

525. Pour la création d'un signe nouveau, il est bon de s'inspirer des signes déjà existants. Gauss et Bellavitis ont eu raison, lorsqu'ils ont créé les signes $\equiv$ et $\underline{\underline{\sim}}$, de s'inspirer du signe de l'égalité. Par contre, il serait mauvais de prendre tel quel un signe ancien, tombé en désuétude; *a fortiori,* le serait-il de prendre un signe encore employé : ç'a été une *faute* de prendre le signe $\dfrac{\cdot}{\cdot}$ des progressions arithmétiques pour indiquer l'exponentation; c'en a été une beaucoup plus grave de prendre le signe de la congruence pour en faire celui de l'identité.

On sait combien ces expressions nouvelles, appelées *néologismes,* rendent difficile la lecture des Ouvrages où ils abondent. Les *signes idéographiques nouveaux,* ceux notamment des Mathématiques, présentent des inconvénients qui ne sont pas moindres. Dès le milieu du XVIII^e siècle, on se plaignait de la multiplicité de ces signes; présentement, ils sont encore plus nombreux.

Il conviendra donc d'être très réservé dans la création des signes nouveaux. Il n'en faudra créer qu'en cas de nécessité absolue. Il est d'ailleurs bien clair qu'en créant ces signes nouveaux on devra leur donner des noms, et les doter de toutes les qualités nécessaires pour en faire des signes excellents.

# CHAPITRE VI.

## MESURE DES QUANTITÉS.

### Définitions précises.

526. En toutes les parties des Mathématiques les *définitions* doivent être *précises*. Elles ne doivent jamais l'être plus que dans les problèmes sur les quantités mesurées.

527. *Il faut dire toujours de quel genre de quantités l'on parle.* Si l'on me dit que l'eau est formée d'une partie d'oxygène combinée à deux d'hydrogène; que le bronze de nos monnaies se compose de 95 parties de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc, on ne me donne que des énoncés insuffisants, car on me laisse ignorer la nature de ces parties. Sont-ce des *poids*, sont-ce des *volumes?* Ne dites jamais telle quantité, telle proportion d'un corps; dites toujours tel *volume*, tel *poids*.

*Lorsque la nature de la quantité est connue, il faut indiquer l'unité dont on se sert pour la mesurer.* On n'appellera pas $x$ la longueur d'une corde, ou la capacité d'un tonneau, ou le poids d'une pierre; mais le *nombre de mètres*, ou de *litres*, ou de *kilogrammes* qui mesure cette longueur, cette capacité, ce poids.

528. Lorsqu'un commerçant vend une marchandise qu'il a précédemment achetée, et qu'il réalise un certain *bénéfice*, on dit, par exemple, qu'il gagne 25 pour 100. Cette façon de parler est encore *insuffisante :* sont-ce 25 pour 100 du prix qu'il a *acheté* la marchandise, ou 25 pour 100 du prix qu'il l'a *vendue?*

Comment définit-on la *durée* de l'oscillation du pendule? En général d'une manière si peu précise que, dans la formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

on se demande souvent si $t$ désigne la durée d'une oscillation ou celle seulement d'une demi-oscillation.

529. Pour définir certaines quantités avec précision, il faut donner *deux indications*. C'est ce qui a lieu pour la *vitesse* dans le mouvement rectiligne uniforme. On y doit considérer une longueur et un temps. On dira une vitesse de $60^{\text{Km}}$ à l'heure, et non pas simplement une vitesse de $60^{\text{Km}}$.

Il est des cas où trois indications sont nécessaires. C'est ce qui arrive dans le mouvement rectiligne varié, pour définir ce qu'on y appelle la *vitesse moyenne* pendant un temps déterminé. Il faut faire connaître : le nombre de mètres parcouru pendant ce temps; le nombre de secondes qui mesure ce temps; l'heure que marque une horloge à l'instant où ce temps commence.

Que serait-ce pour définir une *force!* Il faudrait donner à la fois les trois coordonnées de son point d'application et ses projections sur les trois axes de coordonnées, c'est-à-dire six quantités!

530. Il conviendrait peut-être de rappeler ici, en passant, la différence de signification des mots *temps* et *instant*. Si l'on représente la durée indéfinie par une ligne : le *temps* est un *segment* de cette ligne; l'*instant* n'en est qu'un *point*.

### Sur les abréviations.

531. Il faudra, pour chaque *quantité* entrant dans la question étudiée, faire connaître l'*unité* qu'on a choisie. On écrira le nombre résultant de la mesure, et l'on indiquera l'unité employée.

Nous avons exposé précédemment (75), avec tout le détail nécessaire, la manière d'écrire les nombres concrets et d'en marquer l'unité ou les unités. Nous rappellerons que, pour les quantités usuelles, le nombre décimal écrit ne doit présenter qu'une seule virgule et ne porter qu'une seule indication d'unité; que, pour les quantités complexes, il faut, au contraire, autant d'unités que de groupes de chiffres; mais que, dans ce dernier cas, les calculs deviennent beaucoup plus simples lorsqu'on réduit les nombres complexes à des nombres décimaux ne présentant qu'une seule unité.

532. Que l'on ait, d'ailleurs, à indiquer une seule unité ou plusieurs, on y emploiera toujours les abréviations que nous avons fait connaître plus haut. Toutefois, il pourra se présenter des cas exceptionnels (421) où il conviendra de les modifier légèrement.

Supposons qu'une question nous offre en même temps des quantités de natures si différentes, que les abréviations se rapportant aux unités de deux d'entre elles se trouvent être les mêmes; que l'on ait, par exemple, à considérer à la fois des *stères* et des *secondes de temps;* ou bien des *minutes de temps* et des *mètres*. Dans le premier cas, les *stères* et les *secondes* seraient représentés par la même lettre s; dans le second, les *minutes* et les *mètres,* par la même lettre m. Pour prévenir les confusions qui alors se pourraient produire, il suffirait d'avertir le lecteur qu'on ajoutera temporairement, dans chaque cas, une lettre à l'une ou à l'autre de ces abréviations; qu'on indiquera, par exemple, dans la notation des durées, la seconde par sc ou se; la minute par mn ou mi.

533. Il est évident du reste que les deux cas que nous venons de considérer sont des cas tout à fait exceptionnels; et que, en dehors d'eux et de ceux qui leur ressemblent, nous pourrons toujours, comme nous le répétons à dessein, employer les *abréviations* que nous avons méthodiquement *exposées* (75) dans notre première Partie. Ces abréviations ne sont point de notre invention; elles forment un système régulier, simple, commode. On n'en pourrait dire autant de celles qu'on a récemment proposé de leur substituer.

### Erreurs courantes.

534. C'est une vérité d'observation que beaucoup de personnes, même instruites, ne se font pas une idée nette des *superficies,* ni des *volumes* exprimés à l'aide des unités métriques et de leurs sous-multiples. Pour ne parler que des aires, ne rencontre-t-on pas des prospectus de grands magasins où l'on parle de mouchoirs de poche de $25^{cmq}$? Dans son remarquable Ouvrage sur les unités [1], M. Guillaume ne cite-t-il pas un règlement de douanes, règlement

---

[1] *Unités et étalons*, 1 vol. in-12. Paris, 1893, p. 59 (note 1).

officiel, où il est question de vitres de $50^{cmq}$? Les rédacteurs de ces prospectus, comme ceux de ce règlement, ont sans doute voulu parler de deux carrés ayant le premier $25^{cm}$ de côté, et le second $50^{cm}$. Il semble que beaucoup de personnes ignorent ce qu'est cette petite aire, grande à peu près comme une face d'un dé à jouer, qui constitue le *centimètre carré*. Dans une locution telle que 32 centimètres carrés, elles regardent le mot final *carrés* comme une sorte d'adverbe, qui s'ajouterait à la locution $32^{cm}$, laquelle représenterait simplement une longueur.

535. D'où peut provenir une pareille erreur? De deux causes au moins, le langage et l'écriture. Il semble que la locution *centimètre carré,* composée de deux mots, représente mal un objet unique; et que l'*abréviation officielle* $cm^2$ le représente encore plus mal. L'exposant étant un signe d'opération, il est naturel qu'en lisant l'expression $32^{cm^2}$, on soit conduit à la regarder comme l'équivalent de $(32^{cm})^2$, et à se figurer qu'elle représente un carré de $32^{cm}$ de côté. Encore cette dernière expression serait-elle incorrecte, puisqu'elle signifierait $32^{cm} \times 32^{cm}$, et indiquerait une multiplication dont le multiplicateur serait un nombre concret! On ne saurait trop le redire, la locution *mètre carré,* en abrégé mq, doit être regardée comme un *tout* insécable; il est absolument mauvais d'en séparer les deux parties en la représentant par $m^2$. Il en est de même de la notation $m^3$ employée pour représenter la locution *mètre cube,* en abrégé mc.

536. Dans notre souci inconscient de la logique et de la régularité, nous répugnons à considérer un couple de mots, tel que *centimètre carré,* comme étant la représentation d'un objet unique, par exemple, une certaine petite surface. C'est le même souci qui nous fait attribuer un nom simple à certaines pièces de monnaies, qui nous fait dire un *sou* au lieu d'une pièce de 5 centimes, un *louis* au lieu d'une pièce de 20 francs.

### Signes comparables.

537. C'est une règle générale que *les signes de même nature, employés en même temps, doivent toujours être comparables.* Il

s'ensuit immédiatement, dans le cas qui nous occupe, que *les quantités de même nature, employées en même temps, doivent être exprimées toutes à l'aide de la même unité.*

Il existe, pour chaque genre de quantités usuelles, des unités différentes. Pour les longueurs, par exemple, sans sortir du système métrique, nous comptons une unité principale, quatre multiples et trois sous-multiples. On peut choisir, pour l'expression des longueurs entrant dans une même question, telle ou telle de ces unités; mais si l'on choisit, par exemple, le décimètre pour l'une d'elles, il faudra le choisir aussi pour chacune des autres.

Qu'il s'agisse, d'ailleurs, de surfaces, de volumes, de poids, de valeurs, cette règle doit toujours être observée. Elle doit l'être aussi, en dehors du Système Métrique, pour les durées, pour les angles, etc., etc. Les angles figurant dans une même question devront être exprimés tous en degrés ou tous en minutes ...; ou bien tous, comme ils le sont parfois en Géométrie, à l'aide de l'angle droit et de ses parties aliquotes.

538. Par exception, dans le tracé des courbes qui représentent graphiquement les fonctions, on emploie assez souvent *deux échelles,* c'est-à-dire deux unités de longueur différentes, l'une pour les *abscisses,* l'autre pour les *ordonnées.* C'est ce que font les ingénieurs dans la représentation du profil des terrains; c'est ce qu'on fait sur la plupart des tableaux si employés aujourd'hui dans la statistique et les sciences d'observation. Cette pratique est sans inconvénient parce que, d'ordinaire, ces deux sortes de longueurs ne se mêlent point. Elle offre ce grand avantage de rendre plus visibles les variations des fonctions, d'en mieux montrer, comme on dit, l'allure et le mouvement.

539. Tout problème numérique comporte l'emploi des *nombres abstraits.* C'est sur eux, en effet, que s'effectuent tous les calculs. Les nombres *concrets* ne se montrent qu'au moment où on commence la résolution du problème, et qu'au moment où on la finit : dans le premier cas, pour l'expression des données; dans le second, pour celle des résultats. Il y a donc un instant où l'on abandonne les nombres concrets et un instant où l'on y revient. Dans chacun d'eux, il faut avoir grand soin de ne point écrire d'égalité telle que

celle-ci :

$$150 \times 8,08 = 1212^{f},$$

où l'un des membres est *abstrait* et l'autre *concret,* c'est-à-dire où les deux membres ne sont point comparables. Ces égalités *hétérogènes* et, par conséquent, fautives ne devraient jamais se rencontrer : on en trouve à chaque instant.

540. Pour revenir aux nombres *concrets* qui représentent les quantités d'une même espèce, nous devons ajouter que, pour être absolument comparables, ces nombres, s'ils sont *fractionnaires,* doivent ne nous offrir que des fractions d'une *même nature*. Les fractions ordinaires ainsi employées devront donc avoir toutes le même dénominateur; et les fractions décimales, toutes le même nombre de chiffres décimaux. En écrivant ainsi les unes et les autres, on met évidemment à profit l'équivalence des formes différentes que peuvent prendre, sans changer de valeur, toutes les sortes de fractions.

### Quantités correspondantes.

541. Il faut, avons-nous dit (537), que les quantités d'une même nature soit exprimées toutes à l'aide de la même unité. Lorsque la question qu'on étudie présente des quantités de natures diverses, cette condition n'est point toujours la seule qui s'impose. Il faut, dans beaucoup de cas, que les *unités* choisies pour ces différentes quantités se *correspondent entre elles.* Notre Système Métrique est constitué de telle façon qu'il nous offre de lui-même les unités correspondantes.

542. Lorsque, dans une question, on considère à la fois des *longueurs,* des *surfaces* et des *volumes;* si les longueurs sont exprimées en mètres, les surfaces devront l'être en mètres carrés, les volumes en mètres cubes; si les longueurs sont exprimées en décimètres, les surfaces devront l'être en décimètres carrés, les volumes en décimètres cubes; etc., etc.

L'*are,* c'est-à-dire l'unité des mesures agraires, n'est autre chose que le décamètre carré; l'hectare est donc égal à l'hectomètre carré et le centiare au mètre carré. On évaluera donc les longueurs en

décamètres, en hectomètres ou en mètres, suivant que l'on voudra évaluer les aires en ares, en hectares ou en centiares.

Le *stère* équivaut au mètre cube. Si l'on voulait mesurer en stères un tas de bois de chauffage, il en faudrait mesurer les dimensions à l'aide du mètre linéaire. S'il existait, dans une même question, des longueurs d'une part et, de l'autre, des volumes exprimés en stères, décastères, décistères, il faudrait prendre le mètre pour unité de longueur et le stère pour unité de volume, le décastère et le décistère ne correspondant à aucun multiple ou sous-multiple du mètre linéaire.

Quand on considère à la fois des *longueurs* et des *capacités*, il faut de même que leurs unités se correspondent. Si les longueurs sont exprimées en centimètres, les capacités le seront en millilitres, si les longueurs sont exprimées en décimètres, les capacités le seront en litres; si les longueurs sont exprimées en mètres, les capacités le seront en kilolitres. Fait à remarquer, lorsque le problème nous présente ainsi en même temps des capacités et des longueurs, nous ne devons jamais choisir, comme unité de capacité, ni le décalitre, ni l'hectolitre, ni le myrialitre parmi les multiples du litre, ni le décilitre, ni le centilitre parmi ses sous-multiples, parce que ces différentes capacités ne correspondent ni au mètre linéaire, ni à aucun de ses multiples ou sous-multiples.

**543.** Le *gramme* a été primitivement défini de telle façon que nos unités de *volume* et nos unités de *poids* se correspondent. Pour les solides et les liquides, si les volumes sont exprimés en centimètres cubes, en décimètres cubes, en mètres cubes, les poids le seront respectivement en grammes, en kilogrammes, en tonnes. Par suite, toujours pour les solides et les liquides, si l'on prend le nombre décimal abstrait qui représente le *poids spécifique* d'un corps, il suffira d'y placer, au-dessus de la virgule, l'indication abrégée des mots *gramme, kilogramme* ou *tonne,* pour obtenir aussitôt le *poids* du centimètre cube, du décimètre cube, ou du mètre cube de ce corps.

**544.** Il existe, en Astronomie, une liaison étroite entre la *mesure du temps* et celle des *arcs* ou des *angles*. Cette liaison est telle que les longitudes et les ascensions droites peuvent s'exprimer à volonté

en arcs ou en temps. Il faut donc, pour évaluer ces deux sortes de quantités, choisir des unités correspondantes. Ce choix est d'autant plus facile que les nombres complexes qui mesurent les temps et ceux qui mesurent les arcs sont, pour ainsi dire, calqués les uns sur les autres; que les sous-multiples de l'heure, comme ceux du degré, sont de soixante en soixante fois plus petits, et qu'ils portent les mêmes noms de *minutes* et de *secondes*. Lorsqu'on voudra rendre *décimales* les subdivisions de l'*heure*, il faudra rendre *décimales* en même temps les subdivisions du *degré*.

### Grandeur de l'unité.

545. *Toutes les quantités d'une même nature doivent être exprimées à l'aide d'une même unité.* Mais, parmi les unités, principale ou secondaires, primitive ou dérivées, qui existent pour les quantités de la nature considérée, quelle est celle qu'il convient d'employer? Dans la pratique, certaines unités s'emploient constamment, d'autres ne s'emploient presque jamais.

546. On évalue les petites longueurs en millimètres; les moyennes en mètres; les grandes en kilomètres. — Le mètre carré est d'un usage continuel; le kilomètre carré est usité en Géographie; le décamètre carré et l'hectomètre carré s'emploient comme mesures agraires sous les noms d'are et d'hectare. — Le mètre cube aussi est d'un usage courant : on l'emploie pour le bois de chauffage sous le nom de stère; le décimètre cube constitue le litre, qui est l'unité principale de capacité et qui s'emploie constamment, ainsi que ses multiples, le décalitre et l'hectolitre. — Pour les poids, on choisit comme unités le gramme, le kilogramme, le quintal, la tonne, et parfois aussi le centigramme et le milligramme.

Par contre, on ne prend pour ainsi dire jamais : comme unité de longueur, le décimètre, l'hectomètre, le myriamètre; comme unités de surface, les sous-multiples du mètre carré, non plus que le myriamètre carré; comme unités de volume, les multiples du mètre cube, le décastère et le décistère, le myrialitre, le décilitre et le millilitre; comme unités de poids, le myriagramme, l'hectogramme, le décagramme, le décigramme.

547. Il semble qu'on ait créé, pour chaque unité principale, *trop de multiples et sous-multiples*. Ils sont de *dix* en *dix* fois plus grands ou plus petits. Peut-être eût-il suffi qu'ils le fussent de *cent* en *cent?* Pour les monnaies, ne passons-nous pas du franc au centime sans jamais prononcer le mot de décime qui possède cependant une existence officielle?

Peut-être même eût-il été préférable de prendre les multiples et sous-multiples de *mille* en *mille* fois plus grands ou plus petits? Ce dernier mode eût été en parfait accord avec notre numération soit parlée, soit écrite. Il s'est d'ailleurs introduit, pour ainsi dire spontanément, dans le commerce, l'industrie et la science. Les unités les plus employées y sont, en effet : pour les longueurs, le micron, le millimètre, le mètre, le kilomètre; pour les volumes ou capacités, le microlitre, le millilitre, le litre, le kilolitre ou mètre cube; pour les poids, le microgramme, le milligramme, le gramme, le kilogramme, la tonne.

548. Nous nous formons, en général, une idée assez nette des nombres entiers inférieurs à mille, c'est-à-dire des nombres qui ne sont ni trop grands ni trop petits, des *nombres modérés*. Nous avons vu déjà comment on peut, à l'aide d'une multiplication par une puissance convenable de 10, ramener un nombre quelconque à nous présenter, dans l'écriture, une partie entière comprise, par exemple, entre 1 et 1000. Voilà un *premier moyen* de ramener tout aux *nombres modérés*. *Un autre* consiste à bien choisir l'*unité de mesure*. C'est la nécessité d'obtenir des *nombres modérés,* comme résultats des mesurages, qui domine toute la question du *choix de l'unité*.

549. Plus l'unité employée est *petite,* plus le nombre est *grand* et réciproquement. Une somme de $10000^f$, par exemple, s'évalue en Angleterre, à l'aide de la livre sterling, par un nombre relativement petit; en Portugal, à l'aide du reis, par un nombre très grand. En France, quand nous parlons d'une fortune modeste, nous prenons volontiers comme unité le millier de francs; quand nous parlons d'une grande fortune, le million. Pour obtenir des *nombres modérés,* nous devons donc mesurer les quantités *très petites* à l'aide d'unités *très petites;* les quantités *très grandes* à l'aide

d'unités *très grandes*. Nous devons, en quelque manière, proportionner la grandeur de l'unité à celle de la quantité. C'est ce que l'on fait presque toujours.

On emploie le milligramme pour peser les médicaments qu'on n'ordonne qu'à très petites doses et les substances très rares, telles que les sels de radium. — On emploie le micron pour mesurer les longueurs extrêmement petites, les longueurs d'onde, par exemple, de la lumière et de l'électricité.

On évalue en tonnes les chargements des wagons et des navires; — en milliers ou millions d'habitants les populations des différentes contrées; — en milliers de kilomètres carrés les superficies des États de l'Europe; — en millions de kilomètres carrés, celles des parties du monde et celles des Océans. On évalue la distance de la Terre à la Lune ou au Soleil en rayons terrestres; — et celle de la Terre aux étoiles les plus voisines, à l'aide du grand axe de l'ellipse que décrit la Terre dans son mouvement autour du Soleil.

# CHAPITRE VII.

## OBJETS D'UNE SEULE SORTE, EN NOMBRE DÉTERMINÉ.

### Règle.

550. C'est une règle énoncée plus haut (478) : *les objets d'une même sorte doivent être représentés par des signes d'une même sorte, qui soient en nombre égal à celui des objets, et qui leur correspondent chacun à chacun.* Le nombre des objets peut, d'ailleurs, être un nombre quelconque : il peut s'étendre à l'infini; il peut se réduire à l'unité.

551. Dans ce dernier cas, on est en droit, pour représenter l'*objet unique,* de choisir un *signe arbitraire,* pourvu qu'il soit très net et très simple. On choisira une lettre latine ou grecque, majuscule ou minuscule, qu'on se gardera bien d'affecter d'aucun accent, d'aucun indice, en un mot d'aucun élément modificateur.

552. Le cas le plus simple, après celui d'un objet unique, est évidemment celui de *deux objets d'une même sorte,* celui d'un *couple d'objets analogues.* C'est à l'étudier en détail que le présent Chapitre est presque entièrement consacré.

### Bonnes notations de deux objets analogues.

553. La manière la plus simple de représenter *deux objets de même sorte* par *deux signes de même sorte,* c'est de les représenter par *deux lettres consécutives* appartenant non seulement au même alphabet, mais à une même variété de cet alphabet : par $a$ et $b$; par $\alpha$ et $\beta$; par A et B. Ces lettres rappellent qu'elles sont des signes

analogues, et par la ressemblance de leurs formes, et par la contiguïté de leurs positions dans la suite d'où on les tire. Appartenant à des alphabets différents, à des variétés différentes, ou occupant des places non consécutives, elles seraient évidemment des signes disparates.

554. Il y a dans notre alphabet des *couples de lettres consécutives* qui sont constamment employés, et pour ainsi dire consacrés par l'usage : tels sont $a$ et $b$; $h$ et $k$; $m$ et $n$; $p$ et $q$; $u$ et $v$; $x$ et $y$. Il en est d'autres, qu'on pourrait employer aussi, mais qu'on n'emploie pour ainsi dire jamais : tels sont $e$ et $f$; $h$ et $i$; $j$ et $k$; $q$ et $r$.

L'alphabet grec nous présente de même des *couples de lettres consécutives* qu'on emploie continuellement, et d'autres qu'on n'emploie presque point. Nous citerons : comme exemples des premiers, $\alpha$, $\beta$; $\mu$, $\nu$; comme exemples des seconds, $\eta$, $\theta$; $\rho$, $\sigma$.

Parmi les couples les plus usités de l'alphabet latin, le *couple m, n* présente, pour l'enseignement oral, un inconvénient réel : les deux lettres $m$ et $n$ qui le composent ont des noms si ressemblants, qu'il arrive souvent à notre oreille de les confondre; plusieurs professeurs craignant cette confusion évitent de les employer en même temps. Dans l'écriture évidemment, cet inconvénient disparaît.

555. Les auteurs qui écrivent bien emploient constamment, pour représenter deux objets analogues, les notations si simples que nous venons de conseiller. Ils représentent par $x$ et $y$ deux inconnues ou deux variables analogues; par $h$ et $k$, les accroissements de deux pareilles variables; par $\alpha$ et $\beta$, les deux racines d'une équation du second degré; par $a$ et $b$, deux longueurs jouant le même rôle; par A et B, deux points analogues de l'espace; par M et N, deux points pris sur une même courbe; et deux forces analogues soit par F et G, soit par P et Q.

Sur le plan, les deux coordonnées cartésiennes d'un point sont des longueurs analogues : on les désigne par $x$ et $y$. Il en est de même, toujours sur le plan, des coordonnées bipolaires qui consistent en deux longueurs : on les nomme $u$ et $v$; et des coordonnées bipolaires qui consistent en deux angles : on les nomme $\alpha$ et $\beta$.

### Nouvelles bonnes notations de deux objets.

556. Il est bien évident que *deux lettres consécutives* affectées soit du même accent, $a'$ et $b'$, soit du même indice, $a_0$ et $b_0$, constituent encore un couple de deux signes analogues. Ce couple est aussi correct que le couple $a$, $b$, mais il est moins simple. L'accent ou l'indice commun est, d'ailleurs, inutile lorsque les deux objets considérés sont les seuls que l'on considère; dans le cas contraire, il peut servir à indiquer la correspondance entre ces deux objets et deux objets appartenant à une autre sorte.

557. Deux *lettres identiques* affectées soit de *deux accents consécutifs*, $a'$ et $a''$, soit de *deux indices consécutifs*, $a_1$ et $a_2$, forment aussi d'excellents couples de signes analogues. Ces couples sont fréquemment employés. On désigne par $v'$ et $v''$, deux variantes analogues; par $x'$ et $x''$, les deux racines d'une équation du second degré; et de même par $m_1$ et $m_2$, les masses de deux gaz; par $R_1$ et $R_2$, les rayons de courbure principaux d'une surface en un point; par $f_1$ et $f_2$, deux fonctions jouant le même rôle: par $(\Sigma_1)$ et $(\Sigma_2)$, les deux nappes d'une surface focale; par $F_1$ et $F_2$, les premiers membres des deux équations d'une ligne gauche.

Il est à remarquer que, dans les couples de signes analogues ainsi constitués, on ne se sert guère que des accents $'$ $''$ et que des indices 1 et 2. Il est naturel qu'il en soit ainsi, puisque ces accents ou indices équivalent à nos mots *premier* et *second*.

558. Dans ces mêmes derniers couples, les lettres ne servent souvent que de *supports* aux accents ou indices. On ne peut supprimer celles qui servent de supports aux accents, car on ne saurait se servir d'accents isolés; mais on peut supprimer celles qui portent les indices, et employer ces indices isolément. Les deux objets analogues sont alors représentés par les chiffres 1 et 2 qui en sont les *numéros*. Nous l'avons vu déjà (325), dans les Mathématiques appliquées, Perspective, Charpente, ..., on représente ainsi deux points par les chiffres 1 et 2. Il en est de même dans les Mathématiques pures. En Géométrie élémentaire, par exemple, on peut très bien représenter par ces deux mêmes chiffres, deux points, deux

angles, deux cercles, etc., etc. On place quelquefois ces chiffres entre parenthèses, entre crochets, à l'intérieur d'un cercle : c'est, pour ainsi parler, leur redonner un support.

### Mauvaises notations de deux objets analogues.

559. Deux lettres $b$ et $t$, par exemple, qui appartiennent à une même variété d'un même alphabet, mais qui n'y figurent point à *deux places contiguës,* sont *deux signes disparates.* On ne doit jamais les employer à la représentation de deux objets analogues. C'est une faute de désigner par O et C les centres de deux cercles jouant le même rôle.

560. Deux formes différentes d'*une même lettre,* $\theta$ et $\vartheta$; $\pi$ et $\varpi$; $\pi$ et $\mathfrak{p}$, ne peuvent être employées pour deux objets analogues : ce sont encore des *signes disparates.* Il en est de même de *deux lettres correspondantes,* $a$ et $\alpha$, prises dans *deux alphabets différents.* Pourquoi représenter deux fonctions analogues par $f$ et $\varphi$, lorsqu'il serait si simple de les représenter par $f$ et $g$?

*Deux mêmes lettres* appartenant à *deux variétés* d'un même alphabet, par exemple l'une droite et l'autre penchée, l'une majuscule et l'autre minuscule, sont toujours *deux signes disparates.* On ne saurait les employer à la représentation de deux objets analogues. Il est vrai qu'on n'y emploie pour ainsi dire jamais le couple a, $a$, formé d'une lettre latine et d'une italique; mais on y emploie à chaque instant le couple B, $b$ que forme une majuscule avec la minuscule correspondante. Nous rencontrons ainsi, très souvent, F et $f$ pour deux fonctions, C et $c$ pour deux coniques, bien que ces deux fonctions et ces deux coniques soient tout à fait analogues.

561. Il va, d'ailleurs, sans dire, que ces couples de *signes disparates,* ces derniers comme tous les précédents, qu'on ne peut employer à la représentation des couples d'objets analogues, trouveront très utilement leur emploi quand il s'agira de représenter des *couples d'objets disparates.*

### Nouvelles mauvaises notations de deux objets.

562. Nous avons dit précédemment la grande différence qui existe entre une *lettre non accentuée* et la *même lettre affectée d'un accent*. Cette différence est telle que les lettres $a$ et $a'$, par exemple, doivent toujours être regardées et employées comme deux signes disparates. Il ne faut jamais s'en servir pour deux objets analogues. Cette règle est peut-être, de toutes les règles strictes, celle qui est le moins observée : on l'enfreint constamment.

563. On représente ainsi, d'une manière fautive : deux points analogues d'une courbe par M et M′ ; — deux points homologues d'une homographie par K et K′ ; — deux points symétriques relativement à une droite ou à un plan par A et A′ ; — les centres de deux cercles analogues par O et O′ ; — les points d'intersection d'une conique et d'une droite par $m$ et $m'$ ; — les pôles de deux faisceaux en involution par P et P′ ; — et, par F et F′, les deux foyers soit d'une conique, soit d'une cassinienne.

On commet la même faute lorsqu'on désigne : deux droites analogues par $\Delta$ et $\Delta'$ ; — deux parallélépipèdes analogues par P et P′ ; — deux coniques ou deux quadriques analogues respectivement par C et C′, par Q et Q′ ; — deux surfaces analogues par $s$ et $s'$, par (S) et (S′), par ($\Sigma$) et ($\Sigma'$).

On la commet encore, lorsqu'on représente : par $h$ et $h'$ deux hauteurs analogues ; — par $r$ et $r'$ deux rayons analogues ; — par G et G′ deux génératrices rectilignes analogues ; — par $x$ et $x'$ les abscisses de deux points homologues d'une involution ; — par R et R′, dans une surface, les rayons de courbure de deux sections normales perpendiculaires entre elles ; — par $m$ et $m'$, les coefficients angulaires de deux droites analogues, ceux notamment, dans les coniques, de deux diamètres conjugués.

On a également tort de désigner deux forces, deux vitesses, deux accélérations analogues respectivement par F et F′, par $v$ et $v'$, par $\gamma$ et $\gamma'$ ; — deux nombres analogues par N et N′ ; — les deux périodes des fonctions elliptiques par $2\omega$ et $2\omega'$ ; — et, dans le théorème de Descartes, par $v$ et $v'$ les nombres des variations de l'équation proposée et de l'équation transformée.

### Autres mauvaises notations de deux objets.

564. La *différence* qui sépare $a$ de $a_1$ est de la *même importance* que celle qui séparait $a$ de $a'$. Elle suffit donc à faire du couple $a$, $a_1$, ainsi que de tous ceux qui lui ressemblent, un couple de *deux signes disparates*. Il ne faut donc jamais, pour désigner deux objets analogues, prendre une lettre quelconque et la même lettre affectée d'un indice. Cette nouvelle règle est identique à celle qui précède. Elle est enfreinte presque aussi souvent.

565. On représente par $\theta$ et $\theta_1$ deux fractions jouant le même rôle; — par $f$, $f_1$ ou F, $F_1$ deux fonctions analogues; — par C, $C_1$ deux constantes arbitraires analogues; — par D, $D_1$ deux génératrices rectilignes d'un même système; — et, encore : deux trièdres analogues par T et $T_1$; deux courbes analogues par (C) et ($C_1$); deux aires planes analogues par (A) et ($A_1$).

566. Chose à remarquer : l'indice unique figurant dans chacun des couples de signes qui précèdent est toujours l'indice *un*. L'indice *zéro* se rencontre aussi quelquefois; mais les deux signes $a$ et $a_0$ ne sont pas moins disparates que $a$ et $a_1$.

Voici, d'ailleurs, un exemple bien curieux de cet emploi de l'indice zéro. Il serait difficile de concevoir *deux objets plus analogues* que ne le sont deux quantités imaginaires conjuguées. On a imaginé dans plusieurs Ouvrages, du reste très bons, de représenter ces deux objets si analogues par les deux signes $z$ et $z_0$, qui sont *absolument disparates*.

### Remarques sur nos règles.

567. L'emploi des couples fautifs tels que A et A′ d'une part, A et $A_1$ de l'autre, pour la représentation de deux objets analogues est, on le voit, extrêmement fréquent. Il est passé dans nos habitudes et, pour ainsi parler, il est consacré par l'usage. Aussi plusieurs de nos lecteurs doivent-ils penser que cet emploi ne constitue point

une faute véritable, et que nous avons eu tort d'énoncer les règles qui le proscrivent.

Nous espérons fermement que, quand ils auront lu nos Chapitres sur la représentation des objets de plusieurs sortes, sur la classification des objets et des signes qui leur correspondent, ils trouveront, au contraire, que nos règles sont justes et que nous avons eu raison de les énoncer.

### Objets d'une même sorte, en nombre déterminé.

568. La manière la plus simple de représenter *plusieurs objets d'une même sorte,* c'est de les représenter par *un nombre égal de lettres consécutives* appartenant à une même variété d'un même alphabet. C'est un procédé qu'on emploie constamment.

On désigne par $a$, $b$, $c$, les trois racines d'une équation du troisième degré; — par P, Q, R, trois formes linéaires; — par A, B, C, les trois sommets d'un triangle; — par A, B, C, D, les quatre sommets d'un quadrilatère.

C'est l'usage, en Astronomie, de désigner les différentes étoiles qui composent une constellation par les lettres consécutives de l'alphabet grec, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ....

569. Il y a toutefois, dans l'application de ce procédé, certaines précautions à prendre.

D'abord, il faut bien observer l'*ordre alphabétique,* soit latin, soit grec. On rencontre assez souvent, au lieu du groupe $\varphi$, $\chi$, $\psi$, où les lettres sont dans l'ordre de l'alphabet, le groupe $\varphi$, $\psi$, $\chi$, qui n'est que le précédent dont les deux dernières lettres ont été interverties. Un géomètre contemporain illustre n'emploie jamais que cet ordre fautif $\varphi$, $\psi$, $\chi$.

Il faut ensuite ne point laisser de *lacune* dans la suite choisie. Lorsqu'on écrit la suite M, N, P, on passe la lettre O, peut-être parce qu'elle se peut confondre avec le chiffre zéro. Lorsqu'on parle des trois forces P, Q, S, on passe la lettre R, sans doute parce qu'elle rappelle le mot *résultante*. Quels qu'en soient les motifs, ces deux omissions sont des fautes graves.

Il convient enfin de ne jamais mêler les unes avec les autres des

lettres de *différents alphabets*. C'est une faute de représenter, comme on le fait trop souvent, trois fonctions analogues par les trois lettres $f$, $\varphi$, $\psi$.

### Usage des accents.

570. On peut aussi, toujours pour représenter des *objets d'une même sorte*, se servir de *lettres identiques*, affectées d'*accents consécutifs;* représenter, par exemple, trois nombres par $N'$, $N''$, $N'''$; trois points par $a'$, $a''$, $a'''$; quatre points par $M'$, $M''$, $M'''$, $M^{\text{IV}}$. A moins de motifs particuliers, très sérieux, on prend toujours les premiers accents.

571. Mais, comme dans ce qui précède (487, 569), il ne faut jamais *mêler*, pour la représentation d'objets d'une même sorte, aux *lettres accentuées* une lettre qui ne *le soit pas*.

Il serait mauvais de désigner : trois points d'une même sorte par A, A′, A″ ou par M, M′, M″; — trois nombres par $n$, $n'$, $n''$; — les trois inconnues d'un problème par $x$, $x'$, $x''$; — et, de même : trois coefficients analogues par $a$, $a'$, $a''$; — trois cercles analogues par C, C′, C″; — les trois hauteurs d'un triangle par $h$, $h'$, $h''$; — les trois axes de dilatation d'un cristal par $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$; — un système de trois forces, par $f$, $f'$, $f''$ ou F, F′, F″.

572. On représente souvent les racines d'une équation de degré donné par $r$, $r'$, $r''$, ..., ou par $x$, $x'$, $x''$, .... Ce mode de représentation est toujours fautif. Il le devient encore plus, lorsque l'inconnue de cette équation se nomme $r$ ou $x$. Dans ce cas singulier, en effet, en se servant de ces notations, on commet une faute nouvelle *très grave*, celle d'employer une même lettre $r$ ou $x$ à la représentation de deux objets différents : l'inconnue de cette équation, et une valeur particulière de cette inconnue.

### Usage des indices.

573. Des *lettres identiques*, affectées d'*indices numériques consécutifs*, forment encore des signes d'une même sorte, très

propres à représenter des objets d'une même sorte. On a raison de représenter : trois fonctions jouant le même rôle par $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ ; — trois hauteurs horaires consécutives par $H_1$, $H_2$, $H_3$ ; — quatre droites analogues par $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ ; — quatre forces par $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ ; — les cinq racines d'une équation du cinquième degré, dont l'inconnue est $t$, par $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$, $\theta_5$ ; — et, dans l'espace à cinq dimensions, par $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$, $\xi_5$ les cinq cosinus directeurs d'une droite donnée. Il est à remarquer qu'on prend toujours pour indices les premiers nombres entiers, 1, 2, 3, ....

574. Les lettres *affectées d'indices* ne doivent point être mêlées à celles qui ne présentent *ni indices, ni accents*. C'est une faute grave de représenter trois coefficients analogues par $a$, $a_1$, $a_2$ ; — trois fonctions par $f$, $f_1$, $f_2$ ; — trois poids par P, $P_1$, $P_2$ ; — trois rayons vecteurs par $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$ ; — trois angles analogues par $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ ; — trois fractions comprises entre 0 et 1 par $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$ ; — les paramètres angulaires de trois points d'une ellipse par $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ ; — et de même : quatre points par P, $P_1$, $P_2$, $P_3$ ou M, $M_1$, $M_2$, $M_3$ ; — quatre droites par $b$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ ou BC, $B_1C_1$, $B_2C_2$, $B_3C_3$. Cette faute est pareille, sinon identique, à celle que l'on commet en mêlant aux *lettres accentuées* une lettre qui *ne l'est pas*. Toutefois, aux yeux de certaines personnes, cette dernière paraît un peu moindre : telle qui, pour désigner trois objets d'une même sorte, emploie A, A′, A″, n'emploierait pas A, $A_1$, $A_2$.

575. L'indice *zéro*, dont on se sert parfois, doit nous arrêter un instant. Selon nous, $a_0$ et $a_1$ ne sont pas deux signes analogues. Il s'ensuit que $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ ne sont pas des signes d'une même sorte, et qu'on ne doit pas représenter par $z_0$, $z_1$, $z_2$, $z_3$ quatre quantités analogues, quatre racines. L'indice zéro, à la vérité, est utile pour marquer un objet spécial, pour indiquer une homogénéité, une correspondance ; mais ces différents usages se rencontrent seulement dans les questions qui nous offrent plusieurs sortes d'objets. Dans celles qui ne nous en offrent qu'une, l'indice zéro ne doit jamais figurer. L'y employer serait, non seulement mauvais, mais pour ainsi dire *ridicule*. Quand nous montrons *trois* objets, nous disons : Voici le *premier*, le *deuxième*, le *troisième* et non pas : voici le *zéroième*, le *premier* et le *second*.

### Usage des numéros.

576. Il convient de rattacher aux *indices* les nombres qu'on emploie, comme *numéros,* à la représentation des objets d'une même sorte. En Géométrie analytique, on représente parfois par 1, 2, 3, les trois sommets d'un triangle; — par 1, 2, 3, ..., 9, les neuf points d'inflexion d'une cubique plane. Dans les épures de la stéréotomie et de la charpente, on désigne, nous l'avons vu (325), les points d'une même sorte par des numéros. En Astronomie : les satellites de Jupiter, qui sont, je crois, au nombre de sept, se désignent le plus souvent par des numéros écrits en chiffres romains, I Io, II Europa, III Ganymède, ...; — les petites planètes que nous connaissons, et qui sont aujourd'hui si nombreuses, se désignent par des numéros écrits en chiffres arabes, et placés d'ordinaire entre parenthèses, (1) Cérès, (2) Pallas, (3) Junon, (4) Vesta, ....

577. Les numéros ainsi employés forment des signes d'une même sorte. Leur emploi ne présente nul inconvénient; il exige toutefois, dans la pratique, que l'on prenne certaines précautions.

Il faut choisir les premiers nombres entiers consécutifs 1, 2, 3, ..., en commençant par l'unité. Il faut se garder d'intervertir l'ordre des numéros, et de laisser entre eux des lacunes, même faibles. Il faut ne jamais mêler les chiffres romains aux chiffres arabes, ni employer concurremment des chiffres arabes de types différents. Enfin, dans le cas où il n'y a que des objets d'une seule sorte, c'est-à-dire dans le cas qui nous occupe présentement, il ne faut jamais se servir du numéro zéro.

# CHAPITRE VIII.

## OBJETS D'UNE MÊME SORTE, EN NOMBRE INDÉTERMINÉ.

### $n$ objets d'une même sorte.

578. Dans tout ce qui précède, nous supposions les objets tous d'une même sorte et en *nombre déterminé,* c'est-à-dire donné en chiffres. Nous les supposerons dorénavant en *nombre indéterminé;* et nous désignerons ce nombre par $n$.

579. Lorsque nous ne tenons pas à marquer ce nombre $n$ sur les signes par lesquels nous représentons les objets donnés, nous pouvons représenter ces objets par les *lettres consécutives* de l'alphabet latin ou de l'alphabet grec, en commençant par $a$ ou $\alpha$; finissant par $l$ ou $\lambda$; et ayant grand soin de ne pas écrire toutes les lettres intermédiaires. Le système des $n$ objets donnés est alors représenté par l'une ou l'autre de ces deux suites

$$a, b, c, \ldots, l; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda.$$

Grâce *aux points interposés,* on peut toujours dire, quel que soit le nombre $n$, que chacune de ces suites contient $n$ lettres.

Le plus souvent, comme ci-dessus, on écrit, au commencement, les trois ou quatre premières lettres de l'alphabet employé et, à la fin, la seule lettre $l$ ou $\lambda$. Quelquefois cependant, avant cette dernière lettre, on écrit la lettre qui, dans l'alphabet, la précède immédiatement, ou même les deux qui la précèdent. C'est ce que l'on fait notamment lorsqu'on se propose d'établir ou de vérifier, dans la suite considérée, quelque propriété relative à deux termes équidistants des extrêmes.

580. Lorsque nous tiendrons à bien mettre en évidence, sur les

signes mêmes, le *nombre n des objets donnés,* nous emploierons, pour la représentation de ces objets : soit des numéros, 1, 2, 3, ..., $n$; soit des lettres affectées d'accents, $a'$, $a''$, $a'''$, ..., $a^{(n)}$; soit, le plus souvent, des lettres affectées d'indices, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$. Nous représenterons ainsi : $n$ points pris sur une courbe par $M_1$, $M_2$, $M_3$, ..., $M_n$; — $n$ nombres par $x_1$, $x_2$, $x_3$, .., $x_n$; — les $n$ racines d'une équation par $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ..., $\alpha_n$.

581. Comme précédemment et pour les mêmes raisons, il serait mauvais de représenter celui des objets qu'on place en tête de la suite soit par une lettre sans accent ni indice, soit par une lettre affectée de l'indice zéro (575). Il serait mauvais de représenter, comme le fait constamment Laplace, $n$ objets par $p$, $p'$, $p''$, ..., $p^{(n-1)}$; — et, comme le font une foule d'auteurs, $n$ forces par $f$, $f_1$, $f_2$, ..., $f_{n-1}$; — $n$ nombres par $u_0$, $u_1$, $u_2$, ..., $u_{n-1}$; — les $n$ racines d'une équation par $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_{n-1}$; — les $n$ valeurs données à $z$ par $z_0$, $z_1$, $z_2$, ..., $z_{n-1}$; — les $n$ permutations de $p$ lettres par $A_0$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_{n-1}$.

Toutes ces façons défectueuses de désigner les $n$ objets considérés ont pour effet immédiat de mettre en évidence, non point le *nombre donné n*, mais le *nombre précédent* $n-1$.

582. Il sera bon d'éviter cette anomalie, et de l'éviter même dans les suites d'expressions. Peut-être ferait-on bien : pour représenter $n$ entiers consécutifs, d'appeler le premier, non pas $a$, mais $a+1$ et d'écrire

$$a+1, \quad a+2, \quad \ldots, \quad a+n;$$

plus généralement, pour représenter $n$ termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison $r$, de nommer le premier $a+r$, et d'écrire

$$a+r, \quad a+2r, \quad \ldots, \quad a+nr.$$

583. Nous devons le faire observer, d'ailleurs : dans tout ce que nous venons de dire, nous supposons qu'on nous ait donné la lettre désignant le nombre des objets considérés, et que nous n'ayons point à la choisir. S'il en était autrement, la question exigerait qu'on choisît des signes de deux sortes : des signes pour représenter les

objets; un signe pour en indiquer le nombre. Nous nous occuperons plus tard de la façon d'effectuer ce double choix.

### Suite limitée ou illimitée.

584. Dans une foule de cas, pour représenter une suite *limitée* ou *illimitée* d'objets d'une même sorte, on peut ne représenter que les *premiers* de ces objets. Dans le cas d'une suite illimitée, il est même impossible d'opérer autrement.

585. La manière la plus simple de représenter ces premiers objets, c'est de les représenter par des lettres sans accent ni indice. On peut dire la suite $a$, $b$, $c$, ...; la suite $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... Il n'est même pas nécessaire de prendre les premières lettres de l'alphabet : il suffit que les lettres employées soient consécutives; on représente ainsi par $\varphi$, $\chi$, $\psi$, ... une suite de fonctions.

On peut employer des numéros et dire la suite (1), (2), (3), .... Mais peut-être est-il bon de mettre alors, comme nous venons de le faire, ces numéros entre parenthèses.

On peut aussi employer des lettres affectées d'indices et représenter, par exemple : une série par $u_1$, $u_2$, $u_3$, ...; — la suite des fonctions de Sturm par $V_1$, $V_2$, $V_3$, ...; — celle des polynomes de Legendre par $X_1$, $X_2$, $X_3$, ....

On peut enfin avoir recours aux lettres accentuées; désigner : une suite de dérivées par $F'$, $F''$, $F'''$, ...; — une suite de nombres par $n'$, $n''$, $n'''$, ...; — une suite de quantités quelconques par $a'$, $a''$, $a'''$, ....

586. Mais, comme précédemment, lorsqu'on fait usage d'accents ou d'indices, il est mauvais de représenter le premier objet (488) soit par une lettre *sans accent ni indice*, soit par une lettre affectée de l'*indice zéro*. Dans le cas où nous nous plaçons présentement, c'est-à-dire dans le cas où les objets considérés sont tous de la même sorte, il serait mauvais de représenter : une suite de nombres par $n$, $n'$, $n''$, ...; — une suite de quantités quelconques par $a$, $a'$, $a''$, ... ou par $a$, $a_1$, $a_2$, ...; — une série illimitée par $u_0$, $u_1$, $u_2$, ....

On indique souvent par $u_n$ le terme général d'une série : suivant

que cette série commence par $u_1$ ou par $u_0$, ce terme $u_n$ y occupe le rang $n$ ou le rang $n+1$ ; ce détail nous montre encore l'avantage qu'il y a, lorsque rien ne s'y oppose, à commencer par $u_1$.

587. Dans tous les exemples qui précèdent, les premiers termes de la suite, les seuls qui soient écrits, sont suivis de points analogues *aux points suspensifs :* ils doivent toujours l'être, pour qu'on voie bien que la suite considérée contient encore d'autres termes, en nombre limité ou illimité. Comme nous l'avons déjà dit, Laplace substitue souvent, à cette ligne de points, le seul mot *et cætera,* écrit sous l'une des formes abrégées etc. ou &. Cette manière d'écrire est tombée dans l'oubli : bien qu'elle ne présente guère d'inconvénient, elle ne mérite point d'en être tirée.

### Objets en suite linéaire.

588. Dans toutes nos manières de représenter les objets d'une même sorte, nous avons toujours opéré comme si ces objets étaient disposés en une *suite linéaire* et nous les avons toujours représentés par une *suite linéaire de signes,* l'objet et son signe occupant des places de même rang dans leurs suites respectives.

Il arrive, dans une foule de cas, que les objets donnés répondent à cette supposition, c'est-à-dire sont disposés naturellement, d'eux-mêmes, en une suite linéaire. C'est ce qui a lieu pour certaines expressions dont chacune se déduit de la précédente ou des précédentes : fonctions de Sturm; polynomes de Legendre; nombres de Bernoulli et d'Euler; termes d'une série récurrente; termes d'une série quelconque; valeurs que prend une fonction pour les valeurs entières, consécutives, d'une variable unique, en d'autres termes, valeurs successives d'une variante à un seul indice.

Nous représenterons une pareille suite d'objets comme nous l'avons fait jusqu'ici, par des lettres consécutives latines ou grecques; par des numéros placés ou non entre parenthèses; par des lettres identiques affectées soit d'indices, soit d'accents.

589. C'est encore cette disposition naturelle en suite linéaire que nous présentent : les points en nombre quelconque placés sur une

ligne droite ou courbe ; — les sommets successifs d'une ligne brisée ; — les côtés d'une telle ligne ; etc., etc. Tous ces objets sont évidemment disposés dans l'*ordre où les rencontre* celui qui parcourt cette ligne, dans un sens ou dans l'autre, sans jamais revenir sur ses pas. C'est *cet ordre* que les signes nous devront indiquer.

### Suites fermées.

590. Considérons, non plus une ligne brisée quelconque, mais une *ligne brisée fermée,* c'est-à-dire le contour d'un polygone. Les sommets de cette ligne forment une suite qu'on peut appeler indifféremment suite *fermée,* suite *tournante,* suite *rentrante.* Leur nombre peut être quelconque, déterminé ou indéterminé. On les prendra dans l'ordre où on les rencontre en parcourant le polygone. On les désignera, s'ils ne sont pas trop nombreux, par des lettres consécutives de l'alphabet ; s'ils le sont trop, à l'aide de numéros ou de lettres affectées d'indices. On désignera ainsi par A, B, C, les trois sommets d'un triangle ; par A, B, C, D, les quatre sommets d'un quadrilatère ; et ainsi de suite.

Il en serait de même pour des points, en nombre déterminé ou indéterminé, placés sur un cercle ou, plus généralement, sur une ligne fermée quelconque. Notre cercle trigonométrique a sa circonférence partagée en quatre parties égales ou quadrants, séparées entre elles par quatre points équidistants qu'on nomme d'ordinaire A, B, A′, B′, mais qu'il vaudrait mieux, selon nous, appeler A, B, C, D. Le cadran de nos horloges a sa circonférence partagée en douze parties égales, séparées les unes des autres par douze points équidistants, qui correspondent naturellement aux douze heures ; on les numérote soit en chiffres arabes, soit en chiffres romains ; on numéroterait de la même manière, sur de nouveaux cadrans, les points qui en partageraient la circonférence en vingt-quatre parties égales.

591. Sur les courbes comme sur les lignes brisées fermées, on doit tourner sans jamais revenir sur ses pas. Mais tourner dans quel sens ? *Dans celui qu'on voudra.* En Trigonométrie, on tourne sur le cercle en sens direct, à cause sans doute des applications à

l'Astronomie. Sur les cadrans des horloges, en sens rétrograde, à cause sans doute du mouvement apparent du Soleil. Chose bizarre, en Géométrie analytique, pour aller de $Ox$ à $Oy$ par le plus court chemin, on tourne : dans la *Géométrie plane,* en *sens direct* [1]; dans la *Géométrie de l'espace,* en *sens rétrograde.*

592. Quoi qu'il en soit, dans la plupart de ces manières de désigner les objets formant *une suite fermée,* deux inconvénients *graves* se rencontrent, qui ne sauraient être évités.

En premier lieu, si, sur le cercle trigonométrique comme sur les cadrans de nos montres, on sait en quel point doit être placée la première lettre ou le premier nombre, sur un polygone quelconque ou sur la circonférence d'un cercle, tous les sommets, tous les points sont analogues; *aucun d'eux n'est le premier.* Notre mode de notation a le tort d'indiquer un premier sommet, un premier point.

En second lieu, quand nous tournons autour d'un polygone ou d'un cercle divisé, nous passons d'un sommet ou d'un point de division au suivant d'une façon qui est constamment la même. Il n'en est pas ainsi pour les signes de ces sommets ou points : il y a une opération singulière, un *saut brusque* à effectuer pour passer de la dernière lettre à celle qui la suit immédiatement sur le contour, et qui n'est autre que la première.

Ces deux défauts de nos notations proviennent du désaccord absolu existant entre les objets que nous considérons et les signes par lesquels nous les représentons. Nous ne pouvons d'ailleurs représenter ces objets d'une manière irréprochable. Ils forment, en effet, une suite circulaire, *fermée,* sans commencement ni fin; leurs signes devraient constituer une suite analogue : ces signes forment, au contraire, dans les systèmes d'où nous les tirons, une suite rectiligne, *ouverte,* possédant une fin et un commencement.

### Combinaisons.

593. Lorsque les objets d'une même sorte possèdent une *certaine propriété* à des *degrés tous différents,* ces différences de degré

[1] Bourget et Housel ont tenté sans succès de changer cet usage. — *Géométrie analytique à trois dimensions,* in-8°, Paris, 1872, p. 1.

permettent de les disposer en *séries linéaires* et, par suite, de les bien désigner par lettres, accents ou indices. C'est ce qui arrive : pour des nombres inégaux; pour des droites de longueurs inégales; pour des polygones, des polyèdres, des corps matériels, dont les aires, les volumes, les poids sont tous inégaux.

On disposera de pareils objets par gradation ou dégradation, c'est-à-dire dans l'ordre de leurs grandeurs croissantes ou décroissantes; et, après les avoir ainsi disposés, on en pourra facilement choisir les notations.

594. Supposons que les objets à nommer soient les *combinaisons simples*, $p$ à $p$, de $n$ éléments analogues. Il sera difficile, et le plus souvent impossible, de les disposer en une suite linéaire. Il est *un cas* toutefois où le problème admet *une solution* immédiate : c'est celui où $p$ est égal à $n - 1$, et où les $n$ éléments eux-mêmes ont été, ou peuvent être, disposés en une série ordonnée.

Soit, par exemple, à disposer de cette façon les combinaisons 3 à 3 des 4 lettres $v$, $x$, $y$, $z$. Prenons l'une de ces combinaisons, la combinaison $vxz$. Quel rang devons-nous lui attribuer? Des trois lettres qui la composent, $v$ demanderait la première place, $x$ la deuxième, $z$ la quatrième. Il y a ambiguïté, partant indécision. Mais si nous remarquons que la combinaison considérée, $vxz$, comprend toutes les lettres données sauf une seule, $y$, nous voyons aussitôt que nous supprimons toute difficulté en ordonnant par rapport à elle, et en assignant, par conséquent, le troisième rang à notre combinaison. Nous écrirons les combinaisons, 3 à 3, des 4 lettres $v$, $x$, $y$, $z$ dans l'ordre suivant,

$$xyz, \quad vyz, \quad vxz, \quad vxy,$$

et nous les désignerons tout naturellement par les 4 majuscules

$$V, \quad X,$$

qui correspondent respectivement aux minuscules manquantes.

Les combinaisons, 2 à 2, des 3 lettres $x$, $y$, $z$ devront, pour la même raison, se placer dans cet ordre :

$$yz, \quad xz, \quad xy.$$

C'est toujours ainsi qu'on les ordonne quand on écrit les équations des quadriques.

595. Dans mon Livre sur l'*organisation des assauts complets*, c'est-à-dire sur l'organisation des Concours d'escrime nommés vulgairement *poules*, j'ai distribué les combinaisons 2 à 2 de $n$ éléments ($n$ étant impair) en $n$ groupes contenant chacun tous les éléments, un seul excepté, mais ne les contenant qu'une fois chacun. Comment disposer ces groupes en séries linéaires, afin d'arriver à les bien désigner? La réponse est analogue à celle de l'alinéa précédent. Les $n$ éléments étant désignés par les $n$ minuscules $a$, $b$, $c$, ..., $l$, nous représentons *par* A le groupe qui *ne contient pas a; par* B celui qui *ne contient pas b;* et ainsi de suite.

596. En résumé, nous ordonnons et nommons les combinaisons, $n-1$ à $n-1$, de $n$ éléments par la considération de la lettre unique manquant dans chacune d'elles. Nous reviendrons, d'ailleurs, sur le cas général où les objets à ordonner et à nommer sont les combinaisons simples, $p$ à $p$, de $n$ éléments, l'indice $p$ étant quelconque.

### Ordre introduit parmi les objets.

597. Il peut arriver que les objets, tous d'une même sorte, qui nous sont donnés ne nous présentent aucune particularité permettant de les disposer en série linéaire. C'est ce qui arriverait pour des points matériels, de masses égales, dispersés au hasard dans l'espace. En quel ordre les disposer? Afin de les représenter par des signes, on les placera dans un ordre arbitraire quelconque, et on les désignera soit par une suite de lettres consécutives $a$, $b$, $c$, ... $l$, soit même, s'il en faut marquer le nombre, par une suite de lettres identiques affectées d'indices $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$.

598. Il est à remarquer que les lettres *alphabétiques* déterminent l'ordre d'une façon *moins stricte*, et surtout *moins visible*, que ne le font les *numéros* ou *indices*. Dans une suite de lettres consécutives, je sais bien qu'une lettre, $h$ par exemple, est précédée de $g$ et suivie de $i$; mais je ne sais point immédiatement le rang qu'elle occupe dans la suite; pour le savoir, il faudrait compter. Dans une suite de numéros ou d'indices, chaque signe, au contraire, me dit lui-même son rang. Il sera donc avantageux, lorsque aucun ordre

n'existera dans le système d'objets, de choisir, pour les représenter, des lettres plutôt que des numéros.

Voilà pourquoi, lorsqu'on veut citer des personnes sans établir de *préséances*, on a raison de placer leurs noms dans l'*ordre alphabétique*. Voilà pourquoi aussi l'organisateur d'un *concours* fait bien de désigner, en abrégé, les *concurrents* par les lettres A, B, C, . . . ; il fait d'autant mieux que, le concours une fois terminé, on assignera à ces divers concurrents des numéros marquant les rangs qu'ils y auront respectivement mérités; c'est ainsi que j'ai procédé dans mon Ouvrage sur les *Assauts complets*.

599. Les sommets d'un polygone sont, nous l'avons vu, des objets d'une même sorte; ils forment une suite rentrante; mais ils sont naturellement disposés en série linéaire, dans un certain ordre. Les sommets d'un polyèdre régulier sont aussi des objets d'une même sorte; si l'on pouvait dire qu'ils forment une suite, cette suite serait, pour ainsi parler, *plusieurs fois rentrante;* mais ils ne nous présentent aucune trace d'ordre, et nous ne saurions les représenter d'une façon satisfaisante.

On a imaginé, pour ces objets d'une même sorte, *impossibles* à bien désigner, de les distribuer en différents groupes que l'on considère comme formant des sortes différentes. On remplace ainsi une sorte par plusieurs; un système *homogène* d'objets par un système *hétérogène*. C'est ce qu'on a fait, comme nous le verrons, pour désigner les trente-deux rumbs de la rose des vents; c'est ce que nous ferons, pour représenter par des signes, soit les sommets, soit les faces, soit les arêtes d'un polyèdre régulier (714).

600. Quoi qu'il en soit, dans tous les cas où les objets donnés ne nous offrent *nulle trace d'ordre*, nous introduisons parmi eux, en les désignant par des signes, un *ordre véritable*. Il y a désaccord entre l'ensemble des objets et l'ensemble des signes qui les représentent, celui-ci étant ordonné et celui-là ne l'étant point. Nous pouvons répéter ici ce mot, que je crois de Bacon [1] : *l'esprit humain met souvent dans les choses plus d'ordre qu'il n'y en a.*

---

[1] François Bacon, 1561-1626.

# CHAPITRE IX.

## OBJETS DE DEUX SORTES.

### Deux objets disparates.

601. *Deux objets disparates doivent toujours être représentés par deux signes disparates :* ce serait une faute de les représenter par deux signes analogues. On pourra les désigner soit par deux lettres non consécutives d'un même alphabet, soit par deux lettres appartenant à des variétés distinctes, soit par deux lettres tirées d'alphabets différents.

602. Deux fonctions disparates pourront ainsi être représentées par $f$ et $\varphi$ ou par $f$ et $s$; mais non point par $f$ et $g$. — Dans cet énoncé, trouver la condition pour que A soit divisible par B, les deux nombres considérés sont mal désignés, puisque ce sont des objets disparates. — Les deux termes d'une fraction ordinaire n'ont point la même signification et ne se traitent point de même dans les calculs; ce sont des nombres disparates; il est donc mauvais de représenter une telle fraction par $\frac{a}{b}$; il serait, au contraire, excellent d'imiter les auteurs qui la représentent par $\frac{n}{d}$ : il le serait d'autant plus que ces lettres $n$ et $d$ rappellent les mots *numérateur* et *dénominateur*.

Sur le plan, dans le système des coordonnées polaires, les deux coordonnées d'un point sont deux quantités disparates : une longueur et un angle; on les nomme tantôt $\rho$ et $\omega$, tantôt $r$ et $\theta$; ce sont là de bonnes notations. — Comme nous l'avons déjà fait remarquer (470), dans l'équation

$$y = ax + b,$$

qui, en Géométrie analytique, représente une droite, $a$ et $b$ sont mal choisis, car les objets qu'ils représentent ne sont point analogues.

Si deux points, placés sur une même ligne, sont l'un fixe, l'autre mobile, on peut très bien les désigner par A et M. — Si une droite, mobile dans l'espace, se déplace en s'appuyant constamment sur une droite fixe et sur un cercle fixe, les points où elle touche ces deux lignes ne sont pas des objets analogues; il ne faut pas les nommer P et Q. — L'origine et l'extrémité d'un vecteur, d'un segment, sont évidemment deux points disparates; on pourra désigner le premier par O, le second par E. Dans le cas, il est vrai, où plusieurs points A, B, C, ... sont placés sur une même droite, on peut, sans être répréhensible, parler du segment AB, du segment BC, ...; c'est qu'alors on se borne à se servir, pour désigner les segments, de lettres déjà choisies, et qu'on ne choisit point le signe du segment. Nous avons vu, d'ailleurs, que l'ordre des lettres employées indique alors le sens du segment, et en marque nettement l'origine et l'extrémité.

### Majuscules et minuscules.

**603.** Il arrive souvent, surtout dans les problèmes usuels, que deux quantités de même nature, mais cependant disparates, sont l'une *petite*, l'autre *grande*. On les représente alors par une minuscule et la majuscule correspondante. La différence de ces deux lettres montre que ces quantités ne sont point analogues et marque l'ordre de leurs grandeurs.

**604.** Supposons que, pour des raisons particulières, on distingue, soit dans un trapèze, soit dans un tronc de cône, les deux bases en grande et petite : on les représentera par B et $b$. — Supposons que, dans un problème de Géométrie, figurent deux cercles, l'un grand, l'autre petit; on en désignera les circonférences par C et $c$, les rayons par R et $r$. C'est ce qu'on fait, d'ailleurs, sur la sphère, pour les cercles qu'on nomme précisément *grands cercles* et *petits cercles*.

Deux hauteurs barométriques, deux pressions peuvent se repré-

senter aussi par H et $h$. — On a raison, dans la théorie de la machine d'Atwood, de représenter chacun des deux poids égaux par P, et le poids additionnel par $p$. — On a raison de représenter de même par P le poids d'une caisse pleine, et par $p$ le poids de cette caisse vide. — Si un capital $a$ est placé, à intérêts composés, pendant un certain nombre d'années, la valeur qu'il acquerra, au bout de ce temps, sera très bien représentée par la majuscule A.

605. Dans tous ces exemples, les notations employées expriment l'*ordre de grandeur* des quantités considérées. Elles pourraient, dans d'autres questions, indiquer le *degré d'importance* des objets.

On emploie, en Géométrie, une majuscule A pour désigner un point de l'espace, et la minuscule $a$ pour en désigner la projection sur un plan. Le premier de ces points n'est pas plus grand que le second; mais il est plus important. Les notations sont justifiées.

606. Il ne faut jamais employer une majuscule avec la minuscule correspondante, s'il peut résulter de cet emploi une erreur ou seulement un doute. Si, dans les questions précédentes ou dans des questions analogues, on représentait par la minuscule la plus grande des deux quantités ou le plus important des deux objets, les notations seraient absurdes et causeraient des erreurs. Lorsqu'un point se meut sur une droite, si sa distance à une première origine se désigne par $x$, et sa distance à une seconde par X, il semble que la seconde abscisse doive être plus grande que la première; on ne sait s'il en est ainsi : il y a doute.

### Accents et indices.

607. Deux objets disparates ne sauraient être représentés ni par deux lettres identiques affectées d'accents, ni par deux lettres identiques affectées d'indices. Si les accents ou indices étaient consécutifs, comme dans $a'$ et $a''$, comme dans $b_1$ et $b_2$, les signes sembleraient représenter deux objets analogues. S'ils ne l'étaient point, et qu'on eût par exemple $p'$ et $p'''$, ou $q_1$ et $q_3$, le lecteur chercherait naturellement $p''$ ou $q_2$, qu'il croirait oubliés; il ne s'expliquerait point qu'on ait choisi ni $p'''$, ni $q_3$.

608. Au contraire, une lettre *sans accent* ni *indice* et une lettre *accentuée* ou affectée d'un *indice* constituent *deux signes disparates*. Toutefois, comme nous l'avons fait observer déjà, la lettre exempte de modificateur indique d'ordinaire l'objet le plus grand, ou le plus important, ou le plus ancien.

On peut très bien représenter : par $a$ la valeur exacte d'un nombre et par $a'$ une valeur qui n'en est qu'approchée; — par A un point de l'espace et par A' celui qu'on lui fait correspondre à l'aide d'une transformation quelconque. — C'est l'usage, en Algèbre, une fonction de $x$ étant représentée par $f$ ou $y$, d'en représenter la dérivée par $f'$ ou $y'$.

Il semble, au premier abord, en Géométrie descriptive, que les deux plans de projection soient deux plans analogues et, par suite, que les projections d'un même point de l'espace sur ces deux plans soient deux points analogues. En réalité, dans la Géométrie descriptive, comme dans toutes les Mathématiques appliquées, le plan horizontal et le plan vertical ne sont pas deux plans remplissant le même rôle : ce sont deux plans disparates. Il en est de même des projections d'un point quelconque sur ces plans. Aussi représente-t-on communément par $a$ la projection du point A sur le plan horizontal, et par $a'$ sa projection sur le plan vertical.

609. Lorsque, pour la représentation de *deux objets disparates,* on associe à une lettre quelconque la même lettre affectée d'un indice, on choisit très souvent l'*indice zéro*. La lettre M représentant, par exemple, le point mobile qui décrit une courbe, on représente par $M_0$ l'une, déterminée, des positions de ce point. Les deux points considérés, qui sont évidemment deux objets disparates, sont alors représentés par M et $M_0$. Ce choix de l'indice zéro, qui est déjà très bon, deviendrait excellent si le point fixe désigné par $M_0$ jouait le rôle d'origine, si on le considérait, par exemple, comme l'origine de l'arc $M_0M$.

### Cas singuliers.

610. Avant de choisir les lettres qui doivent représenter deux nombres, deux quantités, il importe d'examiner attentivement les *rôles* que jouent ces quantités ou ces nombres.

Les deux coordonnées cartésiennes d'un point sont, nous l'avons dit, deux quantités *analogues :* on a raison de les désigner par les lettres consécutives $x$ et $y$. Il en est de même lorsque ces coordonnées sont liées par une équation quelconque, et que l'on prend tantôt la première, tantôt la seconde comme fonction de l'autre. Mais si l'on regardait constamment l'ordonnée, par exemple, comme fonction de l'abscisse, ces deux quantités deviendraient deux quantités *disparates;* on pourrait alors, comme on le fait parfois dans certaines équations différentielles, désigner la variable par $x$, la fonction par Y.

611. Soit à définir une transformation géométrique quelconque. Le point d'où l'on part et le point qui lui doit correspondre sont deux objets *disparates*. Le premier, qui est évidemment le plus important, le plus ancien, se désignera par A, le second, qui s'en déduit, par A'.

Au contraire, supposons la transformation définie, *effectuée;* supposons-la *réversible;* et considérons-en deux points correspondants. Ces deux points seront deux objets *analogues;* il nous faudra les désigner par deux signes analogues. Nous les appellerons P' et P'', ou bien $P_1$ et $P_2$.

612. Dans les quantités imaginaires, telles qu'on les considère le plus souvent en Algèbre, le coefficient de $i$ et le terme indépendant de $i$ sont deux objets *disparates;* on devrait donc, contrairement à ce qu'on fait d'ordinaire, les représenter par deux signes disparates, et écrire, par exemple, $a + a'i$ ou $a + \alpha i$. Au contraire, dans la théorie de Cauchy, c'est-à-dire dans la théorie actuelle des quantités complexes, ce terme et ce coefficient deviennent les deux coordonnées cartésiennes d'un point, deviennent, par conséquent, deux objets *analogues :* on a raison d'écrire $a + bi$ ou $x + yi$. Encore ces nouvelles notations ne sont-elles point irréprochables, puisque, par la présence du symbole $i$, elles établissent une dissymétrie entre les deux termes du binome. — La meilleure notation serait, ce me semble, celle de M. Méray [1], qui envisage les quantités imaginaires comme des couples de quantités ordinaires se com-

---

[1] *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale*, in 8°, Paris, 1872, p. 8.

binant entre eux suivant des règles convenues, et représente ces couples par $(a', a'')$, $(b', b'')$, ....

613. On regarde le plus souvent une courbe gauche fixe comme l'intersection de deux surfaces fixes. Ces deux surfaces, jouant tout à fait le même rôle, sont deux *objets analogues*. On les représente par les deux *équations analogues*

$$f = 0, \qquad g = 0.$$

Supposons, au contraire, comme on le fait parfois dans la recherche du plan tangent à une surface donnée, supposons que l'on considère la courbe gauche variable résultant de la section de la surface fixe donnée par une surface variable. Ces deux surfaces ne sont plus *deux objets analogues;* on écrira leurs équations sous de nouvelles formes; la courbe gauche variable sera représentée par les deux équations

$$f = 0, \qquad \varphi = 0,$$

qui sont, comme elles doivent l'être, *nettement disparates*.

### 2 objets d'une sorte, 1 de l'autre.

614. Si trois objets donnés sont 2 *d'une sorte* et 1 *de l'autre,* il faut que les notations le rappellent. Ce serait une *faute grave* que de les représenter par 3 signes d'une même sorte, par 3 *signes analogues*. Cependant, si grave que soit cette faute, elle se commet à chaque instant.

615. Étant donnés deux entiers quelconques désignés par A et B, il est mauvais de représenter par C un de leurs diviseurs communs, car ces trois nombres ne sont point d'une même sorte. — Si l'on nous demande de calculer trois nombres satisfaisant à des conditions données, et dont le premier soit la somme des deux autres, il ne nous faudra point désigner ces trois inconnues par $x$, $y$, $z$; la première devra posséder un signe non analogue à ceux des deux autres : nous pourrons l'appeler $u$. — Pour écrire que les entiers $b$ et $c$ sont congrus par rapport à un certain module, il faut se garder, malgré l'exemple de Gauss [1], de désigner ce module

[1] *Recherches arithmétiques*, in-4°, Paris, 1807, p. 1.

par $a$. — Dans la théorie des séries à termes réels de signes quelconques, on désigne souvent la somme des $n$ premiers termes par $S_n$, celle des termes positifs qui s'y trouvent par $P_n$, celle des valeurs absolues des termes négatifs par $Q_n$, de façon que l'on a l'égalité

$$S_n = P_n - Q_n.$$

Ces notations sont bonnes; elles montrent très bien l'analogie qui existe entre les deux sommes partielles, ainsi que le caractère particulier de la somme totale.

616. Lorsqu'une forme quadratique à plusieurs variables $x, y, \ldots$ ne renferme aucun carré, on l'ordonne souvent par rapport à deux, $x$ et $y$, de ces variables. On l'écrit alors

$$axy + Px + Qy + R.$$

Cette notation est mauvaise, car les trois lettres consécutives P, Q, R semblent représenter trois objets d'une même sorte, tandis qu'elles représentent, en réalité : R une forme quadratique; P et Q deux formes linéaires. — Étant donné le rapport $\frac{y}{x}$, il est mauvais de l'appeler $z$, car les trois signes $x$, $y$, $z$ seraient trois signes analogues. — Il est mauvais aussi, en Géométrie analytique plane, de représenter, comme on le fait souvent, la variable d'homogénéité par $z$, car elle n'est point de la même sorte que les coordonnées $x$ et $y$. — Il serait très mauvais aussi d'appeler $Oz$ une droite quelconque, menée par l'origine, dans le plan des axes $Ox$, $Oy$. — Étant données deux forces et leur résultante, on ne devrait point représenter ces trois objets par les trois lettres consécutives P, Q, R. Conservant R pour la résultante, il serait bon de représenter les deux forces par G et H, ou par $F'$ et $F''$, ou par $F_1$ et $F_2$.

617. On désigne fréquemment un angle isolé par les trois lettres consécutives A, B, C, la lettre du milieu étant placée au sommet, et les deux autres sur les côtés. Ces trois lettres consécutives forment un ensemble fautif. Les trois points qu'elles désignent ne sont pas, en effet, trois points analogues. On pourrait, pour bien écrire, désigner l'angle par AOB, la lettre O étant placée au sommet. — De

même, si l'on mène d'un pôle donné deux tangentes à un cercle donné, les points de contact sont analogues entre eux, mais non pas analogues au pôle. On pourra nommer le pôle P, les points de contact A et B. — Si l'on étudie le triangle isoscèle en lui-même, et non point comme cas particulier du triangle quelconque, il sera bon d'en traiter le sommet proprement dit, c'est-à-dire le sommet commun aux côtés égaux, d'une manière spéciale : on le pourra désigner par S.

618. Supposons qu'on veuille démontrer que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles. Les deux premières droites sont d'une sorte, la troisième est d'une autre. On pourra nommer celle-ci $\Delta$ et celles-là A et B. — Supposons qu'on veuille écrire l'équation générale des coniques tangentes en deux points donnés aux côtés d'un angle donné. L'équation cherchée dépendra de trois droites : les côtés de l'angle et la corde des contacts. Ces trois droites ne sont pas analogues, la dernière jouant un rôle spécial. On pourra représenter les premiers membres de leurs équations respectivement par P, Q et T. Il serait mauvais de les représenter comme dans l'équation habituelle

$$PQ + \lambda R^2 = 0,$$

par les lettres consécutives P, Q, R. — De même, l'équation générale des surfaces conoïdes dépend de trois plans : le plan directeur; les deux plans qui, par leur intersection, donnent la directrice rectiligne. Ces trois plans ne sont point analogues; ce serait une lourde faute de représenter les premiers membres de leurs équations par trois lettres consécutives. On pourra prendre, pour les deux derniers, les lettres P et Q; mais il faudra choisir, pour le premier, une lettre très éloignée de ces deux-là, ou même appartenant à un autre alphabet, $\Delta$, par exemple. L'équation générale des surfaces conoïdes sera alors

$$f(\Delta;\ P,\ Q) = 0.$$

On sait que cette équation est homogène par rapport à P et à Q, mais non point par rapport à $\Delta$. Les lettres ainsi choisies indiquent d'elles-mêmes cette dissymétrie.

619. Dans l'équation

$$ax + by + c = 0,$$

qui, en Géométrie analytique plane, représente une droite, les coefficients de $x$ et de $y$ sont d'une même sorte; mais le terme tout connu est d'une sorte différente. Cette équation est donc mal écrite. — Au contraire, en Analyse indéterminée, l'équation

$$Px + Qy = H,$$

où P, Q, H sont trois nombres entiers, est écrite convenablement, puisque les trois lettres P, Q, H ne sont point consécutives. — Je rencontre, en un bon Ouvrage, l'équation

$$(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2 - \nu^2 = 0,$$

qui représente un cercle. Les lettres consécutives $\lambda$, $\mu$, $\nu$ qui y figurent sont mal choisies. Les objets qu'elles désignent ne sont point, en effet, d'une même sorte, les deux premiers étant les coordonnées du centre; et le troisième, la longueur du rayon.

### $n$ objets d'une sorte, 1 de l'autre.

620. Il peut arriver que l'on ait à considérer en même temps, pour en choisir les notations, $n$ *objets* d'une première sorte, et 1 *objet* unique, d'une sorte différente. On opérera toujours de la même manière. Il faudra que les lettres choisies se partagent d'elles-mêmes en deux groupes : $n$ lettres pour les premiers objets, 1 lettre unique pour le dernier.

621. Considérons une famille de surfaces à un paramètre. Son équation devra contenir ce paramètre et, en même temps, les coordonnées d'un point quelconque. On désignera celles-ci par $x$, $y$, $z$; celui-là par $\lambda$; et on écrira l'équation

$$f(x, y, z; \lambda) = 0,$$

en ayant soin, comme nous avons conseillé de le faire (222), de séparer par un point-et-virgule le paramètre des coordonnées.

Soit à désigner un diviseur commun des quatre entiers $a$, $b$, $c$, $d$ qui, en la question, sont analogues. Il ne faudra point le désigner par $e$.

Dans l'expression, sur une surface, de l'élément linéaire $ds$, on désigne par E, F, G trois coefficients d'une même sorte : c'est bien.

Mais on désigne en même temps par H l'expression $\sqrt{EG - F^2}$ qui ne leur est point analogue : c'est évidemment une faute.

L'équation

$$ax + by + cz + d = 0,$$

qui représente un plan, n'est pas mieux écrite que celle, citée plus haut (619), qui représentait une droite, car ses quatre coefficients sont exprimés par quatre lettres consécutives, bien que les trois premiers soient d'une même sorte et le quatrième d'une sorte différente. — Il en est de même de l'équation

$$\frac{1 + ax}{x - a} + \frac{1 + bx}{x - b} + \frac{1 + cx}{x - c} + d = 0,$$

où le nombre représenté par $d$ n'est certainement point de même sorte que les nombres représentés par $a$, $b$, $c$.

622. Lorsque des droites joignent un même point à plusieurs autres, le point commun d'où elles partent est d'une certaine sorte; les points où elles arrivent sont d'une sorte différente. On pourra désigner le premier par A; les autres par P, Q, R, S; et représenter le faisceau qu'elles forment par A(PQRS). Ce serait une faute de le représenter par A(BCDE).

Les sommets d'un triangle sont trois objets analogues, trois objets d'une même sorte; tout autre point du plan appartient à une sorte différente. Si l'on désigne ces trois sommets par A, B, C, il ne faudra donc désigner aucun autre point par D. Le centre du cercle inscrit, le milieu d'un côté, le pied de la hauteur abaissée d'un sommet sur le côté opposé ne devra donc point s'appeler D. On le nommera O, M ou H.

623. Prenons un tétraèdre. Ses quatre sommets sont d'une même sorte : on les appellera A, B, C, D. Mais si, dans une question quelconque, il arrive que l'un d'eux joue un rôle particulier ou prenne une importance spéciale, il deviendra le sommet proprement dit, la face opposée deviendra la base. On le désignera par S, et les trois sommets de la base se nommeront A, B, C.

Ce dernier cas est celui qui se présente toujours dans les pyramides dont la base a plus de trois côtés, car il est bien évident que, dans une pareille figure, le sommet proprement dit n'est point de

même sorte que les sommets de la base. Les six sommets d'une pyramide pentagonale se désigneront, non point par A, B, C, D, E, F; mais par S; A, B, C, D, E, la lettre S représentant le sommet proprement dit.

### *p* objets d'une sorte, *q* de l'autre.

624. Étant donnés plusieurs objets d'une *première sorte* et plusieurs objets d'*une seconde, il ne faut point que les signes choisis puissent jamais faire croire que tous ces objets sont de la même sorte.*

Il est donc mauvais de nommer A, B, C, D les quatre sommets d'un quadrilatère et, en même temps, E, F les milieux de deux des côtés : car ces 6 points sont de deux sortes, et ces 6 lettres sont consécutives.

Il est donc mauvais de représenter : deux points pris sur une droite par A, B, et deux points pris sur une autre par C, D; — trois points pris sur une courbe par A, B, C, et trois pris sur une autre par D, E, F; — les trois sommets d'un triangle par A, B, C aussi et les trois sommets d'un autre par D, E, F; — les quatre sommets d'une face d'un parallélépipède par A, B, C, D et ceux de la face opposée par E, F, G, H. — Les quatre lettres du premier exemple, les six du deuxième et du troisième, les huit du dernier constituent, en effet, toutes ensemble, une suite de lettres consécutives.

625. On sait que des forces en nombre quelconque, appliquées en différents points d'un même solide, peuvent toujours se réduire à deux. Si les forces données, au nombre de cinq, sont représentées par A, B, C, D, E, il ne faut point que les deux qui les peuvent remplacer le soient par F, G, car on aurait alors sept lettres consécutives. On pourra les représenter par P et Q.

Une forme quadratique aux trois variables $x$, $y$, $z$ s'écrit souvent

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy.$$

Les trois lettres A, B, C désignent alors des coefficients d'une première sorte; les trois lettres D, E, F des coefficients d'une

seconde. Ces notations sont mauvaises, puisque ces deux groupes de trois lettres se raccordent et forment un groupe unique.

Dans les applications géométriques de l'Analyse, on regarde ordinairement la cote $z$ d'un point d'une surface comme une fonction de ses deux autres coordonnées $x$ et $y$. On représente alors par $p$ et $q$ les deux dérivées partielles du premier ordre de $z$ par rapport à $x$ et à $y$; puis par $r$, $s$, $t$ les trois dérivées partielles du second ordre de cette même fonction par rapport à ces mêmes variables. Ces notations, consacrées par un très long usage, sont néanmoins mauvaises, les cinq lettres $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ étant consécutives et ne se partageant point d'elles-mêmes, comme il le faudrait, en deux groupes différents.

# CHAPITRE X.

## CORRESPONDANCES ENTRE DEUX SORTES DE SIGNES.

### Idée du Chapitre.

626. Les signes, avons-nous dit, doivent rappeler les *rapports* qui existent entre leurs objets. Nous nous sommes déjà occupés du cas où tous les objets sont d'une même sorte. Nous allons nous occuper à présent de celui où ils appartiennent à deux sortes différentes. Nous aurons à examiner, dans ce nouveau cas, les *correspondances* de natures diverses qui peuvent exister entre les objets de la première sorte et ceux de la seconde.

627. Nous supposerons d'abord que les objets des deux sortes ne soient pas en nombres égaux; qu'il y en ait moins de la première sorte qu'il n'y en a de la seconde; en premier lieu même qu'il n'y en ait qu'un de la première sorte. Nous supposerons ensuite qu'il y en ait autant d'une sorte que de l'autre : c'est seulement lorsqu'il en sera ainsi que les objets des deux sortes se pourront correspondre chacun à chacun.

### Correspondances entre un objet et plusieurs objets.

628. Considérons un objet unique d'une certaine sorte et plusieurs objets d'une sorte différente. Si l'objet unique correspond à l'un des autres objets, il faudra que cette correspondance soit indiquée par les signes.

629. Les trois sommets A, B, C d'un triangle sont trois points d'une première sorte. Le pied de la hauteur abaissée du sommet A

sur le côté opposé est un point d'une seconde. Il correspond évidemment au sommet A. On devra donc le désigner à l'aide d'un signe A′ ou $A_1$, qui rappelle ce sommet. Ce serait une faute de l'appeler P. C'en serait une plus grande de l'appeler D, puisque cette lettre D, d'abord ne rappellerait point A, ensuite formerait avec A, B, C un groupe de quatre signes analogues.

Étant donnés plusieurs nombres d'une première sorte $a$, $b$, $c$, ..., et un nombre unique d'une sorte différente, correspondant à $b$, on représentera ce nombre unique par $b'$, ou $b_1$, ou $\beta$. Ce serait une faute de le représenter par $p$ ou par $q$.

**630.** Si les signes des objets de la première sorte se distinguent entre eux par des accents ou indices, il suffira, pour représenter l'objet unique correspondant à l'un d'eux d'assigner à sa lettre le même accent ou indice. Si les objets sont représentés par $a'$, $a''$, $a'''$, ..., ou par $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., l'objet unique correspondant au troisième de ces objets sera très bien représenté par $b'''$ ou $b_3$, par $\alpha'''$ ou $\alpha_3$.

**631.** Le cas que nous considérons présentement, celui d'un groupe d'objets d'une même sorte et d'un objet unique d'une sorte différente se rapportant à l'un de ces objets, peut très souvent s'interpréter d'une autre manière. Celui des premiers objets qui correspond à l'objet unique peut, en effet, très souvent, à cause même de cette correspondance, être regardé comme un objet d'une nature spéciale, appartenant à une nouvelle sorte. La question présente alors des objets de trois sortes, et non plus seulement de deux.

### Objet placé à la tête d'une suite.

**632.** Dans un ensemble de points placés sur une courbe et formant, par conséquent, une suite ordonnée, il est bien évident que, si le premier joue le rôle d'*origine* pour les arcs allant de lui à chacun des autres, ce premier point joue un *rôle spécial*. Il est d'une *sorte particulière*, les suivants étant tous d'une *autre sorte*. On pourra désigner ces derniers par $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., et le premier par $A_0$, l'indice zéro convenant très bien à un point servant d'origine. Cependant, si l'on trouvait que $A_0$ ne se distingue pas suffi-

samment de $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., on le remplacerait par une lettre A sans indice ni accent, ou même par une lettre éloignée telle que P.

633. Il existe de nombreux exemples analogues à celui-là. On considère, en effet, fréquemment, des objets en nombre quelconque, qui se déduisent tous d'un certain objet unique, ou plutôt qui se déduisent les uns des autres à partir de cet objet-là. Ce premier objet, que son rôle spécial met à part, ressemble à une origine; il appartient à une première sorte : on le désignera par une lettre sans accent ni indice. Les autres forment évidemment, d'eux-mêmes, une suite ordonnée : on les indiquera, dans l'ordre où on les obtient, par des lettres identiques affectées soit des premiers indices, soit des premiers accents.

C'est ce que l'on fait d'ordinaire dans la pratique. Si $y$ est une fonction de $x$, on en désigne les dérivées successives par $y'$, $y''$, $y'''$, .... — Si V est le premier membre d'une équation algébrique, et qu'on cherche, par la méthode de Sturm, le nombre des racines réelles de cette équation qui sont comprises dans un intervalle donné, on désigne par $V_1$, $V_2$, $V_3$, ... les polynomes à calculer, lesquels se nomment précisément les polynomes de Sturm. — Dans chacune de ces suites,

$$y, y', y'', y''', \ldots : \quad V, V_1, V_2, V_3, \ldots,$$

l'élément de tête est d'une sorte particulière; il joue un rôle spécial et possède un signe spécial.

### Correspondance symétrique.

634. Dans la plupart des questions qui nous présentent ainsi un objet unique d'une première sorte en face d'un groupe d'objets appartenant à une seconde, l'objet unique ne correspond pas plus à l'un d'eux qu'il ne correspond à un autre; on peut dire qu'il ne correspond à aucun ou qu'il correspond également à tous, et que les objets de la seconde sorte constituent par rapport à lui un *ensemble symétrique*. Cette absence de correspondance particulière, ou si l'on veut cette symétrie, doit se traduire par les signes qui représentent tous les objets considérés.

635. Le point de rencontre des tangentes en A et en B à un même cercle ne correspond pas plus à l'un de ces points de contact qu'il ne correspond à l'autre : on le nommera, par exemple, P. — La hauteur d'un trapèze ou d'un tronc de pyramide ne correspond pas plus à l'une qu'à l'autre des deux bases $b_1$, $b_2$ : on la représentera par $h$ ou par $d$. — Des trois plans qui définissent un conoïde, le plan directeur ne correspond à aucun des deux autres : aussi, ayant représenté par P et Q les premiers membres des équations de ceux-ci, avons-nous désigné (618) par $\Delta$ le premier membre de l'équation de celui-là.

636. La somme de deux nombres est une fonction symétrique de ces nombres; elle ne doit rappeler aucun des deux : on aura raison de nommer $t$ la somme des nombres $t'$ et $t''$; de nommer B celle des nombres $B_1$ et $B_2$. — Le produit de deux nombres évidemment devrait se traiter de la même façon.

Il en serait encore de même pour la moyenne arithmétique, géométrique, harmonique entre deux nombres $r'$ et $r''$ : cette moyenne, quelle qu'elle fût, serait très bien représentée par $r$. — Si l'on considérait les produits de $x$, $y$, $z$ par un même facteur, le nom de ce facteur ne devrait rappeler ni $x$, ni $y$, ni $z$ : on l'appellerait $\lambda$ ou $k$.

637. On sait qu'en un point quelconque d'une surface, le rayon de courbure d'une section normale quelconque dépend des deux rayons de courbure principaux, mais non pas de l'un plutôt que de l'autre. On ne peut donc qu'approuver l'auteur qui désigne par R le rayon de courbure de la section quelconque, par $R_1$ et $R_2$ les deux rayons de courbure principaux.

Désignant par X le premier membre d'une équation algébrique, on désigne d'ordinaire par $X_1$, $X_2$, $X_3$, ... les produits des facteurs linéaires, pris une fois chacun, qui correspondent respectivement aux racines simples, doubles, triples, .... Ce sont là de bonnes notations.

C'est une bonne notation aussi de désigner : par $\varpi$ un diviseur premier du produit $abcd$; — par R la résultante des forces $F_1$, $F_2$, $F_3$, ...; — par $2p$ le périmètre du triangle dont les côtés sont $a$, $b$, $c$.

### Correspondance symétrique mal indiquée.

638. On ne saurait s'imaginer combien la règle précédente, si simple pourtant, est souvent enfreinte.

La somme des nombres $a$ et $b$ est une fonction symétrique de ces nombres : on la désigne par A qui rappelle le premier. — Le produit des deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ en dépend symétriquement : on le désigne par $\varphi(x)$ qui rappelle $f(x)$. — Deux infiniment petits du même ordre étant représentés par A et B, on en représente l'ordre commun par $\alpha$. — En Géométrie analytique plane, on appelle OA une droite qui fait avec les axes de coordonnées les angles $\alpha$ et $\beta$. — Dans un Ouvrage célèbre, l'un de nos plus illustres chimistes [1] appelle A et B les quantités de deux acides qui sont nécessaires pour saturer une même quantité $a$ de base.

639. On appelle, toujours à tort, $a$, $b$, $c$ les diviseurs premiers du nombre B. — Étant donné le produit $x^p y^q z^r$, on le représente par la lettre P, qui en rappelle le premier exposant. — Je lis cet énoncé dans un Livre connu : partager le nombre donné A en parties proportionnelles aux nombres $a$, $b$, $c$. — Le polynome F $(x)$ ayant pour racines $\alpha$, $\beta$, ..., on pose constamment

$$F(x) = A(x-\alpha)^\mu (x-\beta)^\nu \ldots,$$

sans s'apercevoir que la constante A rappelle la racine $\alpha$.

Lorsqu'une inconnue est susceptible de recevoir deux valeurs, son nom évidemment ne doit pas correspondre à l'une plutôt qu'à l'autre. Or, à chaque instant, lorsqu'on forme l'équation du second degré qui a pour racines $x$ et $y$, on en désigne l'inconnue par X. Cette faute, si facile à éviter, est l'une de celles qui me choquent le plus. Elle se rencontre dans la plupart des Traités d'Algèbre élémentaire.

640. La faute qui nous occupe s'accompagne, souvent, d'une autre qui enfreint une règle précédemment énoncée. Au lieu de $a^{\overset{\prime\prime}{d}}$,

---

[1] DUMAS, *Philosophie chimique*, in-8°, Paris, 2e édition, p. 223.

on écrit parfois $a^{\overset{\alpha}{\beta}}$. On commet ainsi une faute, en établissant une correspondance entre le nombre $a$ et le numérateur $\alpha$ de son exposant; on en avait commis une première, en représentant les deux termes de cet exposant par les lettres consécutives $\alpha$ et $\beta$.

On représente par $F(x)$ le plus grand commun diviseur des deux polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$ : c'est une faute que $F(x)$ rappelle $f(x)$; c'en était déjà une que les deux polynomes donnés, qui sont deux objets analogues, fussent représentés par les deux signes disparates $f(x)$ et $\varphi(x)$.

Dans la plupart des Traités de Mécanique, on désigne : par $f$ la plus grande commune mesure entre les forces F et F'; — par R la résultante de ces deux mêmes forces; — par $\overline{V}$ le vecteur résultant des vecteurs $\overline{v}$, $\overline{v'}$, $\overline{v''}$, .... Toutes ces notations sont fautives, car l'absence d'accent établit une correspondance particulière : entre $f$ et F, entre R et F, entre $\overline{V}$ et $\overline{v}$. Mais ce n'est pas en choisissant le signe de l'objet unique qu'on a commis la faute : c'est en employant, pour les objets du groupe donné, des signes qui ne sont point tous de la même sorte. Nous ne pouvons trop le répéter : *une lettre sans accent ni indice et une lettre affectée de l'un ou de l'autre ne peuvent jamais être deux signes analogues.*

### Correspondances entre $p$ objets d'une sorte et $q$ de l'autre.

641. Soient des objets de deux sortes, en nombres différents. Les objets de la première sorte peuvent correspondre à quelques-uns de ceux de la seconde, ou ne correspondre à aucun. *Il faudra exprimer par les signes toutes les correspondances qui existent, et n'en indiquer aucune qui n'existe point.*

642. Si les objets de l'un des deux groupes sont représentés par $a$, $b$, $c$, $d$, ..., et s'il en existe deux dans l'autre qui correspondent à $b$ et $c$, on pourra les appeler B et C, ou $b'$ et $c'$, ou $b_1$ et $c_1$, ou $\beta$ et $\gamma$.

Si les objets du premier groupe sont désignés par des lettres identiques, affectées de la suite des premiers accents ou de celle des premiers indices, il suffira, pour indiquer les objets de la seconde

suite qui correspondent à des objets déterminés de la première, d'en affecter les lettres des mêmes accents ou indices.

643. Mais, dans le cas très fréquent où il y a *symétrie* des objets d'un des groupes par rapport à chacun des objets de l'autre, c'est-à-dire où les objets d'un des groupes dépendent également de tous les objets de l'autre, *il faudra que les notations n'indiquent aucune correspondance;* et, par suite, si les objets du premier groupe possèdent des signes marqués d'accents ou d'indices, il faudra que les objets du second ne nous offrent, dans leurs signes, ni indices ni accents.

644. Considérons des forces, en nombre quelconque, appliquées en divers points d'un même corps solide, et désignées par $f_1$, $f_2$, $f_3$, ..., $f_n$. On sait qu'on peut toujours les remplacer par trois ou même par deux. Dans le premier mode de réduction, on pourra désigner les trois forces finales par A, B, C; dans le second, les deux forces finales par P et Q. Dans l'un et l'autre cas, il faudra éviter que les signes correspondant aux forces finales présentent des accents ou des indices, car ceux-ci rappelant aussitôt quelques-uns de ceux des forces données indiqueraient de fausses correspondances.

645. Les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque d'une surface dépendent de deux paramètres. Les signes représentant ces paramètres ne doivent rappeler aucune des lettres $x$, $y$, $z$. On a raison de les nommer $u$ et $v$. Ces lettres $u$ et $v$, d'ailleurs, ne forment point avec $x$, $y$, $z$ un groupe de cinq lettres consécutives, car, dans l'alphabet employé présentement par les géomètres, se trouve, entre les lettres $v$ et $x$, la lettre $w$ dont ils font à chaque instant usage.

646. Je rencontre en un certain Ouvrage l'équation

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = 0,$$

dont on représente les racines par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... : ces notations sont mauvaises, car la racine $\alpha$ paraît avoir avec la lettre $a$ des coefficients une correspondance qui lui est propre.

Je trouve dans un autre l'identité

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l) = x^m + B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \ldots$$

où les coefficients B rappellent trop $b$.

Dans un autre encore, on désigne par A et B deux fonctions symétriques des nombres $a$, $b$, $c$, $d$, ..., sans remarquer que A et B rappellent spécialement $a$ et $b$, et par conséquent excluent toute symétrie.

### Objets en même nombre : usage des lettres.

647. On rencontre fréquemment des *objets en même nombre,* appartenant à *deux sortes différentes,* qui ne se *correspondent pas* chacun à chacun, ou même qui ne se correspondent en aucune manière. C'est ce qui a lieu, par exemple, lorsqu'un énoncé nous présente : trois inconnues et trois données ; — les sommets de deux quadrilatères indépendants l'un de l'autre ; — deux groupes de $n$ points sans aucun rapport entre eux.

Il se faut alors garder soigneusement de désigner les objets de chaque sorte par des lettres accentuées ou affectées d'indices numériques, car deux accents ou deux indices identiques, ou même un accent et un indice de valeurs identiques, établissent des correspondances précises, qui sautent aux yeux. Le mieux, c'est de désigner les objets de la première sorte par des lettres consécutives, et ceux de la seconde par des lettres consécutives aussi, mais éloignées des précédentes.

On pourra désigner ainsi : par $a$, $b$, $c$ les trois données, et par $x$, $y$, $z$ les trois inconnues dont nous avons parlé ; — par A, B, C, D les quatre sommets de l'un de nos quadrilatères, et par P, Q, R, S ceux de l'autre. Il est vrai que ces notations disposent pour ainsi dire dans le même ordre, sur deux lignes, nos données et nos résultats, les sommets de notre premier quadrilatère et ceux du second ; et qu'elles établissent par là une sorte de correspondance entre les objets qu'elles placent au même rang. Mais cette espèce de correspondance, qui est inévitable, n'entraîne guère d'inconvénient, vu que, le plus souvent, elle passe inaperçue.

648. Lorsque les objets se correspondent chacun à chacun, et que cette correspondance est bien indiquée soit dans l'énoncé, soit

dans le texte, ces suites de lettres consécutives suffisent toutefois à la rappeler. Il est très bon de représenter : par M et N deux mobiles qui parcourent respectivement les droites (A) et (B); — par A, B, C les sommets d'un triangle et par P, Q, R les sommets homologues d'un triangle semblable; — par A, B, C, D, E les sommets d'un pentagone et par P, Q, R, S, T les sommets homologues d'un pentagone semblable.

On voit immédiatement que, dans ces deux suites de lettres, celles qui occupent le même rang correspondent aux sommets d'angles égaux; que, si les deux polygones sont directement semblables, on énonce ces mêmes suites en tournant autour d'eux dans le même sens, mais qu'on tourne en sens contraires lorsqu'ils sont inversement semblables; et qu'il en est de même pour deux polygones, soit égaux, soit symétriques.

D'ailleurs, quand on considère deux polygones semblables, ou égaux, ou symétriques, il est toujours bon d'indiquer les côtés et les angles qui se correspondent. Certains auteurs marquent de petits traits, en même nombre, les côtés homologues; et figurent, dans les angles égaux, des petits arcs de cercle qu'ils marquent de même, à l'aide de petits traits. Il est bien évident que, dans l'enseignement oral, lorsque l'on nomme les côtés ou les sommets homologues de deux polygones semblables, on les doit toujours nommer dans le même ordre.

649. Considérons trois points sur une courbe; on les nomme en un certain Livre I, M, N et l'on appelle P, H, Q les pieds de leurs ordonnées : quel défaut de correspondance! — Je trouve, en un autre, quatre points désignés par D, Q, P, C et les pieds de leurs ordonnées respectives par A, M, N, B : pourquoi cette interversion de l'ordre alphabétique?

Deux suites formées, l'une de lettres minuscules, l'autre des majuscules correspondantes, indiquent très bien des objets qui se correspondent chacun à chacun. On peut très bien appeler ABCD un polygone et *abcd* un polygone semblable. — On désigne d'ordinaire par A, B, C, D, ... des points de l'espace et par *a*, *b*, *c*, *d*, ... leurs projections ou perspectives. — Monge [1] désignait

[1] Né en 1746, mort en 1818.

par A, B, C, ... les projections [1] horizontales de certains points, et par $a$, $b$, $c$, ... leurs projections verticales.

On représente souvent : par $x$, $y$, $z$ les coordonnées du point d'application d'une force et par X, Y, Z ses composantes parallèles aux axes; — par $x$, $y$, $z$ les anciennes coordonnées d'un point et par X, Y, Z les nouvelles; — par $p$, $q$, $r$ des nombres variables et par P, Q, R leurs limites respectives.

On peut employer aussi des minuscules et des majuscules en même nombre qui ne se rapportent point aux mêmes lettres. C'est ce qui a lieu, dans les expressions

$$\sqrt[l]{A},\quad \sqrt[m]{B},\quad \sqrt[n]{C},$$

pour les indices des racines et les quantités soumises aux radicaux; mais ce mode de notation indique moins nettement les correspondances.

650. Nous avons déjà dit (490) que les alphabets latin et grec nous offraient des groupes de lettres consécutives qui se correspondaient très bien. D'abord, $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$; ensuite $l$, $m$, $n$ et $\lambda$, $\mu$, $\nu$. C'est de plus une habitude de faire correspondre $x$, $y$, $z$ et $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Deux groupes de lettres ainsi constitués représentent très bien deux groupes d'objets qui se correspondent chacun à chacun. Deux nombres approchés étant désignés par A et B, on en peut donc très bien désigner les erreurs absolues par $\alpha$ et $\beta$. — Trois variables correspondant à trois fonctions, on a raison de représenter ces variables par $x$, $y$, $z$ et ces fonctions par $\varphi$, $\chi$, $\psi$ ou $\xi$, $\eta$, $\zeta$. — Quatre droites correspondant respectivement à quatre plans, on a raison aussi de représenter ces droites par A, B, C, D et ces plans par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. — Pour définir deux suites de nombres directement ou inversement proportionnels, on peut appeler $a$, $b$, $c$, ... les nombres de la première suite, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... ceux de la seconde; écrire, dans le premier cas,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \ldots$$

et, dans le second,

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = \ldots$$

Toutes ces notations nous paraissent excellentes.

---

[1] *Géométrie descriptive*, in-4°, Paris, an VII, p. 92.

### Usage des nombres pairs et impairs.

651. C'est l'usage, un usage excellent, d'appeler A, B, C les sommets d'un triangle et $a$, $b$, $c$ les côtés opposés. Cet usage pourrait s'étendre à tous les polygones d'un nombre impair de côtés. Mais comment désigner, en n'employant qu'un signe par élément, les côtés et les sommets d'un polygone, dont les côtés sont en nombre pair, ou plutôt en nombre quelconque?

Supposons qu'on parcoure ce polygone dans un sens déterminé. Désignant les sommets par les majuscules successives A, B, C, ..., on pourra désigner par $a$ le côté qui commence en A; par $b$ celui qui commence en B; et ainsi de suite. Les majuscules désigneront les sommets; les minuscules, les côtés. C'est une première solution de notre problème.

On en obtient une seconde, en tournant autour du polygone, et écrivant successivement, sur les sommets et côtés, les nombres entiers 1, 2, 3, .... On voit immédiatement alors que les nombres impairs marquent les sommets et les nombres pairs les côtés, ou réciproquement. Cette notation a été employée par Beman [1], qui se servait de chiffres romains.

Le partage des nombres entiers en pairs et impairs est, d'ailleurs, précieux pour la notation des objets de deux sortes, lorsqu'il est nécessaire d'indiquer un ordre de succession. C'est ce qu'on vient de voir sur les polygones. C'est ce qu'on observe aussi sur le mode de numérotage des maisons employé, depuis Napoléon Ier, dans les rues de Paris : les numéros pairs à droite et les impairs à gauche.

### Usage des accents et indices.

652. Les lettres consécutives, sans accent ni indice, et les mêmes lettres, affectées toutes d'un accent ou d'un indice, constituent deux groupes de signes qui se correspondent chacun à chacun d'une manière très précise. On peut appeler : $a'$, $b'$, $c'$ les quotients des nombres $a$, $b$, $c$ par un même diviseur; — $x'$, $y'$, $z'$ les valeurs

---

[1] *Enseignement mathématique*, in-8°, Paris, t. I, p. 175.

absolues de $x$, $y$, $z$; — $\alpha'$, $\beta'$ deux infiniment petits équivalant respectivement aux deux infiniment petits $\alpha$ et $\beta$. — On peut représenter de même : par A′, B′, C′, ... les extrémités des vecteurs ayant pour origines A, B, C, ...; — par A′, B′, C′ ou $A_1$, $B_1$, $C_1$ les pieds des hauteurs abaissées des sommets d'un triangle; — par P′, Q′, R′, ... les projections des points P, Q, R, ... sur un même axe; — par $A_1$, $B_1$, $C_1$ les points où une transversale coupe les côtés d'un triangle opposés aux sommets A, B, C; — par A′B′C′ le triangle sphérique symétrique du triangle ABC; — et, d'une manière générale, par $a'b'c'$... la figure déduite, suivant un procédé quelconque, de la figure $abc$....

653. Toutefois, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois observer (608), les lettres du premier groupe, par ce fait seul de ne nous offrir ni indices ni accents, impliquent, dans les objets qu'elles désignent, un certain degré d'*antériorité* ou de *prééminence*. Si les objets des deux groupes sont d'*égale importance*, si la transformation qui permet de déduire les seconds des premiers est une transformation *réversible, il faudra que les lettres servant à les désigner soient toutes accentuées ou toutes affectées d'indices.*

Si les différentielles de certaines variables sont proportionnelles à certaines fonctions, on écrira donc

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

On représentera donc une suite de fractions par

$$\frac{n'}{d'}, \quad \frac{n''}{d''}, \quad \frac{n'''}{d'''}, \quad \ldots,$$

établissant par les accents une correspondance très nette entre les numérateurs et les dénominateurs. — On représentera donc : par $s_1$, $s_2$, $s_3$, ... les mesures algébriques des segments $S_1$, $S_2$, $S_3$, ...; — par P′, P″, P‴, ... les pieds des ordonnées des points M′, M″, M‴, ...; — par $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ et $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ deux groupes de quatre pôles qui se correspondent deux à deux; — par $a'$, $a''$, $a'''$, ... et $b'$, $b''$, $b'''$, ... les points formant, sur deux axes ou sur un seul, deux divisions homographiques. — Il est évident : que les deux bases d'un prisme sont bien représentées par $A_1B_1C_1D_1E_1$

et $A_2B_2C_2D_2E_2$; — que l'on a raison de désigner par $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... les points d'application des forces $F_1$, $F_2$, $F_3$, ...; — et par $g_1$, $g_2$, $g_3$, ... les centres de gravité des triangles $t_1$, $t_2$, $t_3$, ... en lesquels on a décomposé un polygone plan.

### Objets en même nombre : mauvaises notations.

654. Pour que les correspondances qui existent entre des objets de deux sortes, se répondant chacun à chacun, soient bien représentées, *il importe que les différences par lesquelles se distinguent les uns des autres les signes des seconds objets soient de même nature que celles par lesquelles se distinguent les signes des premiers.* Ceux-ci étant représentés par deux minuscules $w$ et $z$, il ne faut point que ceux-là le soient par P et $p$, c'est-à-dire par une majuscule et une minuscule; — $x$, $y$ et $z$ étant fonctions d'un même paramètre, ces fonctions ne devront point être désignées par $f$, $\varphi$ et $\psi$; — les degrés des équations

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi = 0$$

ne devront point être désignés non plus par $m$ et $p$.

Que dire de la proportion

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n},$$

où l'on écrit que les longueurs de deux segments, dont les signes diffèrent par les lettres A et B, sont proportionnelles à deux nombres représentés par les lettres $m$ et $n$, dont la première rappelle M et dont la seconde ne rappelle rien? — Peut-on imaginer qu'on désigne par $a$ et $x$ les abscisses de deux points représentés par $M_0$ et $M_n$?

655. C'est évidemment une faute de faire correspondre une suite d'*indices numériques* à une suite de lettres *sans indice ni accent;* — d'appeler, par exemple, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ les fonctions d'un paramètre qui expriment les valeurs de $x$, $y$, $z$; — d'appeler de même $F_1$, $F_2$, $F_3$ les forces qui ont pour points d'application respectifs A, B, C.

C'est une faute pareille de faire correspondre à ces mêmes lettres une suite d'accents. On ne doit donc point, dans un triangle, désigner par $h'$, $h''$, $h'''$ les hauteurs partant des sommets A, B, C; — ni

par M′, M″, M‴ les milieux des côtés $a$, $b$, $c$; — ni par $m'$ $m''$. $m'''$ les longueurs des médianes correspondantes.

On représente souvent par $r'$, $r''$, $r'''$ les rayons des cercles exinscrits respectivement tangents aux côtés $a$, $b$, $c$; il vaudrait mieux les nommer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. — Un auteur désigne par $d_a$, $d_b$, $d_c$ les points de contact du cercle des neuf points avec ces mêmes cercles exinscrits : c'est là une bonne notation, et un emploi ingénieux des indices littéraux.

### Autres mauvaises notations.

656. Lorsque les objets des deux sortes se correspondent chacun à chacun, leurs correspondances sont analogues, ou tout au moins d'égale importance. Il ne faut donc point, par la faute des notations, qu'une ou plusieurs d'entre elles paraissent être d'une nature particulière ou posséder une importance spéciale.

Étant donnés deux forces et leurs points d'application, il est évident que la correspondance entre chaque force et son point d'application est la même; il est donc mauvais d'appeler ces forces F et F′ lorsque ces points sont désignés par A et B, les lettres A et F, dépourvues toutes deux d'accents et d'indices, indiquant une relation plus étroite que ne l'est celle qu'indiquent B et F′. Cette notation est très mauvaise.

Il en est de même de celles où l'on désigne : par $x$ et $x'$ les abscisses des points P et Q; — par $x$ et $y$ les sinus des angles T et T′; — par $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ les doubles signes du binome $\varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2$; — par $u$ et $v$ les rayons vecteurs qui vont d'un point aux deux foyers F et F′; — par $\alpha$ et $\beta$ les angles qui leur correspondent; — par G et G′ deux génératrices rectilignes appartenant respectivement aux systèmes $\lambda$ et $\mu$; — par $n$ et $n'$ les ordres respectifs des infiniment petits $\alpha$ et $\beta$.

657. Ces différentes fautes nous offrent un aspect commun, et proviennent toutes d'une faute initiale unique, toujours la même; celle qui consiste à représenter deux objets analogues par deux signes disparates, savoir : une lettre sans accent ni indice et une lettre affectée de l'un ou de l'autre. C'est ce qu'on vient de faire,

en représentant : par F et F′ deux forces analogues; — par $x$ et $x'$ deux abscisses analogues; — par T et T′ deux angles analogues; etc., etc.

On voit par là combien nous avons eu raison (487, 562, 564, 611), et avons raison encore, d'insister sur la grande différence qui sépare une lettre exempte d'accent et d'indice d'une lettre affectée d'un indice ou d'un accent.

# CHAPITRE XI.

## OBJETS DE PLUS DE DEUX SORTES.

### Généralités.

658. L'étude si détaillée que nous venons de faire, des systèmes formés par des objets de deux sortes, nous a suffisamment familiarisés : d'abord, avec la manière de distinguer les sortes différentes et d'en désigner les objets; ensuite, avec celle de constater les correspondances et de les exprimer par les signes. Dans le cas de plusieurs sortes d'objets, nous n'aurons qu'à appliquer successivement, plusieurs fois, les procédés que nous avons déjà employés.

Nous allons donner, pour ces objets de plusieurs sortes, des exemples très nombreux, très variés, empruntés à toutes les parties des Mathématiques.

Nous eussions aimé étudier d'abord les exemples comprenant trois sortes d'objets, puis ceux qui nous en offrent quatre, cinq ou davantage. Mais cet ordre eût été difficile à suivre, car certains exemples, qui nous présentent des sortes en nombres différents, ne sauraient être séparés ni *a fortiori* éloignés les uns des autres : tels sont les couples formés de deux exemples, presque identiques, tirés l'un de la Géométrie analytique plane, l'autre de la Géométrie analytique à trois dimensions. Nous classerons nos exemples d'après la partie des Mathématiques à laquelle nous les aurons empruntés.

### Exemples tirés de l'Arithmétique.

659. Étant donnés deux nombres entiers, un de leurs diviseurs communs, et leurs quotients respectifs par ce diviseur, c'est-à-dire cinq objets appartenant à trois sortes différentes, un élève me les a désignés par F et G, par M, par D et D'. Or, la lettre M, qui repré-

sente ainsi un diviseur, rappelle le mot multiple ; les lettres D et D′, qui sont deux signes disparates, rappellent chacune le mot diviseur, et représentent des quotients analogues. Il serait difficile d'imaginer de plus mauvaises notations.

Ce sont là, je le répète, des notations improvisées par un élève. Mais je pourrais citer une Arithmétique, d'ailleurs très bien faite, où l'on désigne par R, R′, R″ les restes des divisions de P, A, B par un même diviseur $a$.

On a, au contraire, raison d'appeler $a$, $b$, $c$, ..., $l$ des nombres variables; A, B, C, ..., L leurs limites; et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., $\lambda$ les excès respectifs de ces limites sur ces nombres.

### Exemples tirés de l'Algèbre.

**660.** Considérons les séries simultanées

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$$

Elles nous présentent trois sortes d'objets : la variable $x$; les coefficients $a$; les coefficients $b$. Il est évident que leurs termes se correspondent deux à deux, et que cette correspondance est très bien exprimée par les indices des coefficients.

Pour établir que toute équation algébrique du degré $m$ possède $m$ racines, on écrit la suite d'égalités

$$f(z) = (z - a) f_1(z),$$
$$f_1(z) = (z - b) f_2(z),$$
$$f_2(z) = (z - c) f_3(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui nous présente évidemment quatre sortes d'objets. Il faudrait que les racines de $f(z)$ fussent désignées par $r_1$, $r_2$, $r_3$, ..., et non pas par $a$, $b$, $c$, ..., car elles correspondent aux fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$, ....

**661.** Un auteur pose

$$x + y = e^{2t}, \qquad x' + y' = e^{2t'},$$

puis multiplie ces égalités membres à membres et écrit le résultat qu'il obtient sous la forme

$$X + Y = e^{2(t+t')}.$$

Ces notations sont mauvaises, car $x$ et $x'$, comme $y$ et $y'$, comme $t$ et $t'$ sont des couples de signes disparates représentant des couples d'objets analogues.

Les majuscules A, B, C désignant trois polynomes en $x$, $y$, $z$, il n'est point mauvais de désigner par A′, B′, C′ les résultats qu'on obtient en y substituant, à la place de $x$, $y$, $z$, les valeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Je préférerais cependant de beaucoup que, les variables étant désignées par X, Y, Z, on représentât par $a$, $b$, $c$ les valeurs que prennent les polynomes A, B, C, lorsqu'on y remplace ces variables par $x$, $y$, $z$.

662. Des objets *deux à deux disparates* appartiennent forcément à des *sortes différentes,* à raison *d'un objet* par *sorte.* On les représentera par des signes *deux à deux disparates.*

Dans les Tables d'annuités publiées par le Bureau des Longitudes, on appelle : l'annuité $a$; le capital à constituer C; le taux $r$; le nombre d'années $n$. Ce sont là de bonnes notations.

L'équation

$$\frac{f(x)}{F(x)} = E(x) - \frac{\varphi(x)}{F(x)},$$

qu'on rencontre dans la décomposition des fractions rationnelles, est, au contraire, mal écrite, car les quatre polynomes qu'elle nous offre sont encore disparates deux à deux, et les majuscules consécutives E, F qu'elle emploie peuvent faire regarder comme analogues deux polynomes qui ne le sont point.

663. *Il ne faut jamais que les notations indiquent de fausses correspondances.*

Si deux inconnues sont désignées par $x$ et $y$, il faudra, dans l'équation du second degré qui les donne, désigner l'inconnue unique par Z, mais non point par X ou Y.

Étudiant la division d'un polynome $f(x)$ par le produit

$$(x-a)(x-b),$$

un auteur écrit

$$f(x) = (x-a)(x-b)\varphi(x) + Ax + B.$$

Il a tort évidemment de choisir, pour les coefficients du reste, les lettres A et B, qui rappellent respectivement $a$ et $b$.

### Exemples tirés de l'Analyse.

664. La suite complète des nombres entiers peut s'écrire

$$\ldots, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad +2, \quad \ldots;$$

elle s'étend à l'infini dans les deux sens. Si une série s'étend de même, on en peut représenter les termes par

$$\ldots, \quad u_{-2}, \quad u_{-1}, \quad u_0, \quad u_{+1}, \quad u_{+2}, \quad \ldots.$$

Soit une fonction continue F. Nous en avons désigné les dérivées successives par F′, F″, .... Nous aurions pu les désigner par $F_1$, $F_2$, ..., et désigner alors par $F_{-1}$, $F_{-2}$, ... les intégrales successives de F.

Dans chacun de ces deux exemples, nous trouvons trois sortes d'objets : dans le premier, un objet unique qui sert d'origine, des objets qui s'en éloignent vers la droite, des objets qui s'en éloignent vers la gauche ; — dans le second, un objet unique qui est F, la suite des dérivées de F, la suite de ses intégrales. Les notations qu'on vient d'indiquer représentent très bien, dans chaque cas, ces trois sortes d'objets.

665. Nous avons déjà dit (225, 427) que c'était une faute d'avoir représenté par $\omega$ et $\omega'$ les deux périodes des fonctions elliptiques. Cette faute en engendre d'autres. Certain auteur écrit

$$w = 2m\omega - 2n\omega',$$

ce qui est mauvais. Représentant les périodes par $\alpha$ et $\beta$, ou par $\omega'$ et $\omega''$, il eût dû écrire l'une ou l'autre de ces égalités :

$$w = 2m\alpha + 2n\beta, \qquad w = 2m'\omega' + 2m''\omega''.$$

Si plusieurs objets sont représentés par deux systèmes de signes, les uns anciens, les autres nouveaux, et que ces systèmes de signes se correspondent mal, c'est que l'un d'eux, au moins, est mal écrit. Il en est ainsi dans la théorie des fonctions elliptiques, où l'on emploie, pour représenter les mêmes quatre fonctions, tantôt les

quatre signes analogues $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$, tantôt les quatre signes disparates H, $H_1$, $\Theta_1$, $\Theta$.

Les fonctions de Weierstrass se représentent d'ordinaire par

$$\Lambda l(x), \quad \Lambda l_1(x), \quad \Lambda l_2(x), \quad \Lambda l_3(x).$$

Il semble, d'après nos principes, qu'on eût dû leur assigner les indices 1, 2, 3, 4. En réalité, on a eu raison de les noter comme on l'a fait, car la première n'est point de la même sorte que les trois suivantes; elle joue un rôle spécial, comme on le voit sur les équations

$$sn\,x = \frac{\Lambda l_1(x)}{\Lambda l(x)}, \qquad cn\,x = \frac{\Lambda l_2(x)}{\Lambda l(x)}, \qquad dn\,x = \frac{\Lambda l_3(x)}{\Lambda l(x)},$$

qui relient ces fonctions aux fonctions elliptiques.

**666.** La forme générale d'un infiniment petit d'ordre $n$ est

$$h^n(\mathrm{A} + \varepsilon),$$

les lettres $h$, A, $\varepsilon$ désignant respectivement : l'infiniment petit principal; un nombre constant différent de zéro; et un nouvel infiniment petit. Si l'on en considère deux en même temps, l'un d'ordre $m$, l'autre d'ordre $n$, on doit les écrire

$$h^m(\mathrm{A} + \varepsilon), \qquad h^n(\mathrm{B} - \eta);$$

je les trouve le plus souvent sous ces formes fautives

$$h^m(\mathrm{A} - \omega), \qquad h^n(\mathrm{A}' - \omega').$$

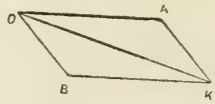
S'ils étaient du même ordre, et possédaient la même valeur principale, la constante figurant dans les parenthèses devrait être la même; mais, si ces infiniment petits se nommaient $\alpha$ et $\beta$, cette constante ne devrait s'appeler ni A, ni B : on la pourrait désigner par K.

### Exemples tirés de la Mécanique.

**667.** Le parallélogramme des forces, qui est une figure si simple, nous présente, dans la plupart des Livres, de mauvaises notations. Considérons-en les quatre sommets; ils sont de trois sortes : le point d'application des forces; les extrémités des deux composantes; l'extrémité de la résultante. On peut nommer : O le pre-

mier; A et B les deux suivants; K le dernier; comme dans la figure ci-dessous. Tel auteur les appelle A, B, C, D; tel autre M, N, O, P;

Fig. 1.




et, dans ces deux cas, les quatre sommets, qui appartiennent à trois sortes différentes, sont représentés par des signes d'une seule. — Plusieurs, appelant O le point d'application commun, appellent les trois autres sommets A, B, C ou P, Q, R, comme s'ils étaient trois objets analogues : c'est pour ainsi dire la même faute.

Au contraire, l'auteur d'un Traité élémentaire de Mécanique, considérant un point assujetti à rester sur une surface et une force agissant sur ce point, décompose cette force en deux : une composante tangentielle et une composante normale. Il appelle : A le point donné sur la surface; F l'extrémité de la force qui agit sur lui; N et T les extrémités des composantes normale et tangentielle. Ce sont là de bonnes notations.

668. La composition de deux forces parallèles est fort analogue à celle de deux forces concourantes; elle peut même s'en déduire. Elle donne lieu, dans les figures, à d'aussi mauvaises notations.

Les objets qu'elle nous présente sont évidemment au nombre de six, appartenant à quatre sortes : les deux composantes; leur résultante; les deux points d'application des composantes; le point d'application de la résultante. Nous avons déjà dit qu'il était mauvais de représenter les trois points d'application par les trois lettres consécutives A, B, C; les trois forces par les trois lettres consécutives P, Q, R. Certain auteur appelle les points d'application A, B, C et les forces $f$, $f'$, $r$ : ce sont là des notations détestables.

669. Considérons deux forces multiples d'une autre, et en même temps les accélérations produites par ces trois forces. Ce sont là huit objets se partageant en cinq sortes, savoir : les deux premières forces; leur commune mesure; les entiers exprimant combien de fois chacune de ces forces contient cette commune mesure; les accélérations produites par les deux premières forces; l'accélération

produite par la troisième. Il serait facile de représenter ces huit objets par de bonnes notations; il suffirait d'appeler : F′ et F″ les deux premières forces; $f$ la troisième; $n'$ et $n''$ les entiers considérés; Γ′ et Γ″ les accélérations produites par les premières forces; γ l'accélération due à la troisième. — Dans les Livres, je trouve presque toujours : F, F′, $f$ pour les trois forces; $n$ et $n'$ pour les deux entiers; γ et γ′ pour les deux premières accélérations : toutes notations mauvaises, puisque F et F′, pas plus que $n$ et $n'$, pas plus que γ et γ′ ne sont des signes analogues. J'y trouve, pour représenter la troisième accélération, tantôt φ, tantôt α, tantôt ω, qui ne rappellent en rien les signes employés pour les deux premières.

670. Supposons trois forces dont les lignes d'action concourent en O. On pourra, sans employer aucun indice : les nommer $f, g, h$; désigner leurs points d'application respectifs par F, G, H; appeler $r$ leur résultante et R son point d'application. On pourra, en se servant d'indices, désigner : ces mêmes trois forces par $f_1, f_2, f_3$; leurs points d'application par $a_1, a_2, a_3$; leur résultante par F, et son point d'application par A. Toutes ces notations sont bonnes.

Il s'en rencontre souvent qui nous semblent loin de l'être. Tel auteur appelle $p$, $p_1$, $p_2$ les trois forces; M, M′, M″ leurs points d'application. Tel autre, ayant appelé M le point de concours des lignes d'action, appelle $f_1, f_2, f_3$ les forces, et MA, MB, MC ces lignes d'action elles-mêmes.

671. C'est l'habitude, en Mécanique rationnelle, de désigner : une force par F; ses projections sur les axes par X, Y, Z; les coordonnées de son point d'application par $x, y, z$. Ces notations sont excellentes. Elles s'étendent d'elles-mêmes à un système de $n$ forces. Il suffit de donner des indices à toutes les lettres que nous venons d'écrire. On considérera alors : les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$; leurs projections $X_1, Y_1, Z_1$; $X_2, Y_2, Z_2$; ...; $X_n, Y_n, Z_n$; et les coordonnées $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; ...; $x_n, y_n, z_n$ de leurs points d'application.

Si l'on voulait en considérer une quelconque, sans spécifier laquelle, on lui attribuerait un indice littéral, par exemple $i$ ou $j$.

672. Les Mathématiques appliquées, Physique, Mécanique, Méca-

nique céleste, nous présentent fréquemment des systèmes d'objets disparates deux à deux. Il les faut, nous l'avons déjà dit (469, 601), représenter par des signes deux à deux disparates.

C'est ce qu'on fait en Physique et en Mécanique, lorsqu'on désigne par P, V, D le poids, le volume et la densité; — par $\lambda$, $\sigma$, $\upsilon$ les coefficients de dilatation linéaire, superficielle et cubique; — par $t$, $\pi$, $l$, $g$ les quatre nombres qui figurent dans la formule du pendule; — par $m$ la masse d'un point matériel, par F la force qui le sollicite, par $\gamma$ l'accélération du mouvement qu'elle produit.

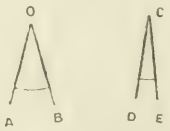
C'est ce qu'on fait aussi, en Mécanique céleste, pour le développement des coordonnées elliptiques. On considère, en cette question : l'excentricité, l'anomalie moyenne, le demi-grand axe, le rayon vecteur, l'anomalie excentrique, qui sont des quantités deux à deux disparates. On a l'habitude de les représenter respectivement par les signes $e$, $\zeta$, $a$, $r$, $u$, qui sont aussi disparates deux à deux.

### Exemples tirés de la Géométrie élémentaire.

673. Considérons sur un axe deux points fixes, un point mobile et les distances de celui-ci à ceux-là. Les deux points fixes sont analogues : on les désigne, en un certain Ouvrage, par les signes disparates O et O'. On y désigne par A le point qui est mobile. On y appelle $x$ et $y$ les distances OA et O'A. Cet ensemble de notations est mauvais. — J'aurais désigné : les deux points fixes par A et B; le point mobile par M; les distances MA, MB par $x$, $y$ ou $\alpha$, $\beta$.

674. Pour montrer que, dans un même cercle, les angles au centre sont proportionnels aux arcs compris entre leurs côtés, un

Fig. 2.

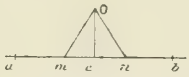



auteur emploie cette figure. Les notations en sont évidemment fautives; les sommets des deux angles, qui sont des points analogues, y étant désignés par les lettres disparates O et C; et, au con-

traire, les cinq lettres consécutives A, B, C, D, E y représentant cinq objets qui ne sont point d'une même sorte.

Dans cette nouvelle figure, relative à deux obliques partant de O et dont les pieds *m* et *n* s'écartent également du pied *c* de la perpen-

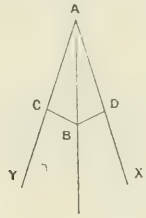
Fig. 3.




diculaire, les notations seraient bonnes sans la présence des trois lettres consécutives *a, b, c* pour des points de deux sortes.

Soit la figure sur laquelle on raisonne pour établir que tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des deux côtés; les no-

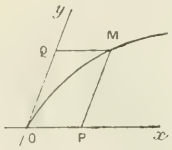
Fig. 4.




tations en sont souvent très bonnes; sous la forme que je reproduis ici, elles ne valent rien. Il est évident, en effet, que nous avons à considérer six objets appartenant à quatre sortes : le sommet de l'angle; ses deux côtés; le point de la bissectrice; ses projections sur les côtés de l'angle : or, les lettres employées se partagent en deux groupes seulement, X, Y, et A, B, C, D.

La figure ci-dessous nous présente encore six objets répartis en

Fig. 5.




quatre sortes : le point O; les axes OX, OY; le point M; ses projections P et Q sur les axes. Cette classification est bien rendue par

les signes. Les correspondances entre les projections et les axes le sont bien aussi.

675. On a raison d'appeler A′, B′, C′ les points où les trois droites joignant les sommets d'un triangle à un même point O vont rencontrer les côtés opposés. Il serait mauvais de les appeler D, E, F, ces trois nouvelles lettres, dans notre alphabet, suivant immédiatement A, B, C.

Si le triangle A′ B′ C′ a ses trois sommets sur les côtés du triangle ABC, on pourra très bien représenter par A″ un point pris sur le côté B′C′.

Si l'on appelle L, M, N les sommets d'un triangle dont les côtés sont respectivement perpendiculaires à ceux du triangle ABC, il faudra que L, M, N correspondent à A, B, C. On marquera cette correspondance en plaçant les lettres L, M, N respectivement à la rencontre des perpendiculaires aux deux côtés partant de A, aux deux côtés partant de B, aux deux côtés partant de C.

Pour établir les relations existant entre les aires des carrés construits sur les côtés du triangle ABC et les aires de certains rectangles, un professeur abaisse les trois hauteurs AA′, BB′, CC′ du triangle ABC, puis il les prolonge jusqu'à leurs points de rencontre avec les côtés opposés des carrés, et il nomme ces derniers points L, M, N. Ce sont là de bonnes notations.

676. Certaines égalités, qui constituent des théorèmes, nous présentent des notations excellentes.

Telle est l'égalité

$$ax + by + cz = 2S,$$

où $a$, $b$, $c$ sont les trois côtés d'un triangle de surface S, et où $x$, $y$, $z$ sont, en grandeurs et en signes, les distances à ces trois côtés d'un point quelconque de leur plan.

677. Le point, la ligne, la surface, le volume, considérés comme éléments de l'espace, sont quatre éléments disparates. On les peut désigner par $p$, $l$, $s$, $v$, qui sont aussi quatre signes disparates.

Pourquoi appeler A, B, C, D, E, F les six points où deux droites percent trois plans parallèles? Pourquoi appeler de même A, B, C, D, E, F les six sommets d'un prisme triangulaire? N'est-il pas

évident que, dans chacun de ces exemples, les six points se partagent en deux sortes ou en trois?

On a grandement raison, en Géométrie descriptive, de représenter un point de l'espace par A; et ses projections, sur le plan horizontal, le plan vertical et la ligne de terre, respectivement par $a$, $a'$ et $\alpha$.

678. Soient A, B, C les trois sommets d'un triangle, et $\omega_1$, $\omega_2$ deux points donnés dans son plan. Les perpendiculaires élevées par $\omega_1$ et $\omega_2$ sur $A\omega_1$ et $A\omega_2$ se coupent en un point qu'on appelle $I_a$ : c'est une excellente dénomination.

La figure relative au problème de la Carte est souvent mal notée. Dans un certain Traité de Trigonométrie, elle l'est très bien. On y appelle M le point à déterminer; A, B, C les points connus auxquels on le rapporte; $a$, $b$, $c$ les côtés du triangle ABC; et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles sous lesquels on les voit respectivement du point M.

679. Considérons le triangle. Sans même nous occuper de ce qu'on en appelle *la nouvelle Géométrie*, on y trouve une foule d'objets à classer et à représenter par des signes. Un géomètre [1] en représente : par A, B, C, $a$, $b$, $c$, $p$ les trois sommets, les trois côtés et le demi-périmètre; — par O, R, S, G le centre du cercle circonscrit, le rayon du même cercle, la surface, le centre de gravité; — par $o$, $o_a$, $o_b$, $o_c$ les centres des cercles inscrit et exinscrits; — par $r$, $r_a$, $r_b$, $r_c$ les rayons respectifs de ces cercles; — par $h_a$, $h_b$, $h_c$ les trois hauteurs; — par A′, B′, C′ les points de contact des côtés avec le cercle inscrit; — par $A'_a$, $B'_a$, $C'_a$ les points de contact des côtés avec le cercle exinscrit dont $o_a$ est le centre; — etc., etc. On ne saurait choisir, pour ces nombreux objets, un meilleur ensemble de notations.

### Points sur les courbes.

680. En coordonnées *cartésiennes*, un point possède : dans le plan, deux coordonnées; dans l'espace, trois. Il faut que ces coordonnées rappellent le point qu'elles déterminent.

---

[1] Émile Lemoine, *Association française pour l'avancement des Sciences*. Congrès de La Rochelle, 1882, séance du 28 août.

Considérons, dans l'espace, deux points donnés quelconques. Si on les nomme $M_1$ et $M_2$, on nommera leurs coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$ et $x_2$, $y_2$, $z_2$; — si on les nomme $M'$ et $M''$, on désignera leurs coordonnées par $x'$, $y'$, $z'$ et $x''$, $y''$, $z''$; — si on les nomme A et B, on désignera leurs coordonnées par $x_a$, $y_a$, $z_a$ et $x_b$, $y_b$, $z_b$. — Il ne faut point, comme le font certains Livres, appeler P et Q les points qui ont pour coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ et $x''$, $y''$, $z''$; ni A et B ceux qui ont pour coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$ et $x_2$, $y_2$, $z_2$.

681. Un géomètre, prenant deux points sur une courbe, nomme ces points M et N, et les pieds de leurs ordonnées A et B : voilà de bonnes notations; mais il désigne leurs abscisses respectives par $x_0$ et $x_1$, ce qui est évidemment très mauvais. — Un autre désigne par $M_0$ et $M_1$ les deux points de la courbe; par $P_0$ et $P_1$ leurs projections sur l'axe des $x$; par $a$ et $b$ leurs abscisses : c'est une nouvelle faute, aussi grave que la précédente.

Considérant trois points sur une courbe, on les nomme, en un certain Livre, $M_0$, M, $M_1$; on nomme leurs projections $P_0$, P, $P_1$; leurs abscisses $a$, $x$, $b$; — en un autre, on nomme ces points $M_0$, $M'$, $M_1$ : leurs projections $P_0$, $P'$, $P_1$; mais on désigne leurs ordonnées par $y_0$, $y_m$, $y_1$. Tout cela est très mauvais.

Dans une étude sur les intégrales définies, on se donne sur une courbe deux points fixes $m_0$ et M dont on désigne les abscisses par $x_0$ et X; entre ces deux points fixes, on en insère un nombre variable $p$; on les nomme $m_1$, $m_2$, ..., $m_p$; on appelle leurs abscisses $x_1$, $x_2$, ..., $x_p$ : ce sont là de bonnes notations.

682. Dans le choix des coordonnées des points, il faut distinguer le point qui décrit la courbe; les points particuliers placés sur la courbe; et aussi, en dehors d'elle, certains points donnés, soit fixes, soit mobiles. Nous supposerons, pour simplifier, qu'il s'agisse d'une figure plane; mais tout ce que nous dirons pour le plan s'étendra à l'espace.

Le point décrivant se nommera M; ses coordonnées seront X, Y ou $x$, $y$. Il est avantageux de prendre les premières, car on peut alors utiliser les secondes pour un point particulier remarquable de la courbe. C'est ce qu'on fait d'ordinaire lorsque l'on cherche l'équation de la tangente ou de la normale à une courbe en un point.

Si l'on désignait par $x, y$ les coordonnées du point décrivant M, il faudrait appeler $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, ... ou bien $x'$, $y'$, $x''$, $y''$, ... celles des points particuliers $M_1$, $M_2$, ... ou $M'$, $M''$, .... Dans le cas où l'un de ces points jouerait le rôle d'origine, on lui attribuerait l'indice zéro. On ferait de même si l'on ne considérait sur la courbe qu'un seul point particulier : il est bien évident qu'il serait mauvais d'appeler ce point unique $M'$ ou $M_1$ et d'en désigner les coordonnées par $x'$, $y'$ ou $x_1$, $y_1$.

Lorsque les coordonnées courantes sont X, Y, on peut nommer $x$, $y$ celles d'un point pris n'importe où dans le plan. On désignera ainsi par $x$, $y$ les coordonnées du point P dont on cherche la polaire par rapport à une conique.

Mais quelles notations employer pour un point fixe, situé soit sur la courbe, soit en dehors, et qu'il est impossible de regarder comme une position particulière du point décrivant? D'abord, on se gardera de le nommer M : on n'appellera donc point $M_0$ le centre d'un cercle; on l'appellera C; — on appellera de même S un sommet, F un foyer, etc., etc. Ensuite, il serait mauvais de désigner les coordonnées d'un pareil point par $x_1$, $y_1$ ou $x'$, $y'$ : on les représentera par $x_0$, $y_0$ ou plutôt par $a$, $b$, par $\alpha$, $\beta$.

683. Soient à considérer deux courbes connexes situées sur un même plan. On pourra n'employer pour la première que des lettres latines, pour la seconde que des lettres grecques. Ces courbes se nommeront alors (C) et ($\Gamma$); — les points qui les parcourent, $m$ et $\mu$; — les positions particulières de ces points, $m_1$, $m_2$, ..., $\mu_1$, $\mu_2$, ...; — les coordonnées courantes, $x$, $y$, $\xi$, $\eta$; — celles des points particuliers, $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, ...., $\xi_1$, $\eta_1$, $\xi_2$, $\eta_2$, .... — On choisira pour leur point d'intersection l'une des majuscules communes aux deux alphabets, par exemple A, qu'on pourra même affecter de l'indice zéro. Quant aux coordonnées de A, elles se nommeront $x_0$, $y_0$ sur la première courbe, $\xi_0$, $\eta_0$ sur la seconde, et elles seront égales deux à deux.

684. Pour les systèmes de points, l'usage des indices est toujours bon. Supposons $n$ points fixes, joints par des droites à un point unique, on aura raison de les appeler $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ : d'appeler K

le point unique, et de désigner par $r_1$, $r_2$, ..., $r_n$ les longueurs des droites $P_1K$, $P_2K$, ..., $P_nK$.

Un géomètre [1] considère deux systèmes, l'un de $l$ points, l'autre de $m$; — il désigne les points du premier système par $A_1$, $A_2$, ..., $A_l$; ceux du second par $B_1$, $B_2$, ..., $B_m$; — ayant à prendre un quelconque des premiers, il l'appelle $A_\lambda$; un quelconque des seconds, il l'appelle $B_\mu$. — Ce sont là des notations excellentes, pour ne pas dire parfaites.

### Équations de la Géométrie analytique.

685. Dans la représentation paramétrique des courbes, soit planes, soit gauches, on a trois sortes d'objets à considérer : le paramètre, les coordonnées, les fonctions du paramètre qui les représentent. On désignera toujours le paramètre par $t$, et les coordonnées par $x, y$, ou $x, y, z$; on désignera les fonctions : dans le plan par $f$ et $g$, ou $\varphi$ et $\chi$; dans l'espace, par $f$, $g$, $h$, ou $\varphi$, $\chi$, $\psi$.

Les coordonnées étant représentées par des lettres consécutives du même alphabet, il serait mauvais de représenter les fonctions qui leur correspondent : dans le plan par $f$ et $\varphi$, ou $\varphi$ et $\psi$, ou $f_1$ et $f_2$; dans l'espace par $f$, $\varphi$, $\psi$ ou $\varphi$, $\psi$, $\omega$, par $f_1$, $f_2$, $f_3$ ou $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$. Je trouve en un Livre excellent les équations

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s), \qquad z = ms,$$

qui représentent une hélice : il faudrait évidemment y remplacer $\psi$ par $\chi$. Je trouve dans un autre, pour les coordonnées d'une ligne unicursale, les équations

$$x = \frac{B}{A}, \qquad y = \frac{C}{A},$$

où A, B, C désignent des fonctions de $t$ : ces trois lettres sont mal choisies, car, étant consécutives, elles semblent désigner trois objets analogues.

686. La représentation paramétrique des surfaces comporte de même trois sortes d'objets : les deux paramètres, les trois coordonnées, les trois fonctions qui leur correspondent. On désigne

---

[1] E. Carvallo, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XII, février 1893.

d'ordinaire les paramètres par $u$ et $v$; les coordonnées par $x$, $y$, $z$; les fonctions par $f$, $g$, $h$.

Un auteur représente les surfaces d'une certaine espèce par les équations paramétriques

$$x = \varphi(u) + \varphi_1(u_1),$$
$$y = \psi(u) + \psi_1(u_1),$$
$$z = \chi(u) + \chi_1(u_1),$$

qui sont triplement fautives : il y faudrait appeler les paramètres $u_1$ et $u_2$; les fonctions correspondantes $\varphi_1 \varphi_2$, $\psi_1 \psi_2$, $\chi_1 \chi_2$; et, de plus, échanger entre eux les seconds membres des deux dernières équations, puisque l'ordre alphabétique des trois lettres grecques est $\varphi$, $\chi$, $\psi$ et non pas $\varphi$, $\psi$, $\chi$.

687. Une famille de courbes planes étant représentée par l'équation

$$F(x, y; a) = 0,$$

un auteur représente, sous forme paramétrique, la courbe répondant à une valeur particulière de $a$ par les équations

$$x = f_1(t; a), \qquad y = f_2(t; a).$$

Cette notation a le défaut de faire correspondre aux lettres $x$ et $y$, non pas deux lettres différentes, telles que $g$ et $h$, mais deux indices numériques 1 et 2.

Je rencontre, en un certain Ouvrage, les égalités

$$y = \varphi_1(x), \qquad y = \varphi_2(x), \qquad y = \varphi_3(x),$$

qui représentent les trois valeurs de $y$ correspondant à une même valeur de $x$. N'eût-il point fallu les représenter par $y_1$, $y_2$, $y_3$? Bien plus, l'auteur de l'Ouvrage, un instant après, désigne par $x_1$, $x_2$, $x_3$ trois valeurs de $x$ sans relation aucune avec $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$!

688. Il faut choisir avec grand soin les lettres employées comme coefficients dans les équations de la Géométrie analytique.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2a'y - \alpha = 0,$$

qui représente un cercle. Elle est très mal écrite. Les lettres $a$ et $a'$, qui désignent les coordonnées du centre, sont mal choisies : il faudrait $a$ et $b$. La lettre $\alpha$, qui désigne la puissance de l'origine par rapport au cercle, ne devrait point rappeler $a$ : il faudrait la remplacer par H, K ou P.

**689.** Dans les équations simultanées de deux cercles analogues, on note souvent très mal les coefficients qui se correspondent. Les exemples de ce genre de fautes fourmillent littéralement.

Considérons les deux équations simultanées

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2ax - 2a'y + \alpha = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2bx - 2b'y + \beta = 0.$$

Les six lettres $a$, $a'$, $\alpha$, $b$, $b'$, $\beta$ sont mal choisies : il leur faudrait substituer $a'$, $b'$, $K'$ dans la première ; $a''$, $b''$, $K''$ dans la deuxième.

Les équations simultanées

$$x^2 + y^2 - 2ax + \alpha = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2bx + \beta = 0$$

ne sont point meilleures.

Il en est de même des deux équations

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2a'y + \alpha = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + \lambda = 0.$$

**690.** Les équations

$$xy + \lambda(px + qy + 1)^2 = 0,$$
$$xy + \lambda'(p'x + q'y + 1)^2 = 0,$$

qui sont celles de deux coniques homologiques, sont encore mal écrites : il faudrait $\lambda'$, $p'$, $q'$ dans la première, $\lambda''$, $p''$, $q''$ dans la deuxième.

Dans les équations des coniques confocales

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (lx + my + t)^2,$$
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (l_1x + m_1y + t_1)^2,$$

il faudrait $l_1$, $m_1$, $t_1$ et $l_2$, $m_2$, $t_2$.

D'une manière générale, deux coniques analogues, jouant le même rôle, ne doivent point être représentées par les équations

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots = 0,$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + \ldots = 0;$$

les coefficients doivent tous porter un accent dans la première, deux dans la seconde ; ou bien, dans la première l'indice 1 et, dans la seconde, l'indice 2.

# CHAPITRE XII.

## CAS DIFFICILES.

### Tableaux simples.

691. Il est toujours bon de supposer les *objets disposés*, sur une ligne, sur un plan, dans l'espace, *conformément à leur nature*, c'est-à-dire à leurs analogies et à leurs différences. Ce mode de disposition met en évidence toutes les classifications dont les objets sont susceptibles; il facilite grandement le choix des signes qui les doivent représenter.

692. Si les objets se rangent d'eux-mêmes en une *série linéaire*, leurs signes formeront une *pareille série*. C'est ce qui a lieu pour la série

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots.$$

où chaque terme ne nous offre qu'un indice.

Si les objets se disposent sur un plan en *un Tableau* soit carré, soit rectangulaire, le *signe* de chaque objet nous offre *deux indices*, l'un pour sa ligne, l'autre pour sa colonne. On reconnaît ici la notation employée pour les éléments des déterminants et des matrices, pour ceux de la table d'addition ou de multiplication, en un mot, pour les éléments de tous les abaques ou tables à double entrée.

Des objets qui se disposeraient, dans l'espace, de façon à former un *parallélépipède*, un *cube*, devraient être représentés par des signes nous offrant *trois* indices. C'est ce qui a lieu dans les déterminants cubiques.

693. Réciproquement, les signes que nous venons d'indiquer peuvent être regardés comme représentant l'ensemble des valeurs particulières d'une *variante* à 1, 2, 3, ... *indices*. Ces valeurs sont donc des objets susceptibles d'être disposés de façon à former une

ligne, un parallélogramme, un parallélépipède. L'ensemble qu'elles forment peut recevoir une disposition géométrique.

Il n'en est plus de même pour les variantes qui nous présentent 4, 5, 6, ... indices, à moins qu'on n'ait recours aux hyperespaces à 4, 5, 6, ... dimensions. Ces valeurs pourraient y être disposées de façon à y constituer l'une de ces figures qui continuent la suite *segment de droite, parallélogramme, parallélépipède,* et que l'on nomme, pour cette raison, des *parallélotopes* [1].

## Tableaux divers.

694. Des signes bien choisis, quels qu'en soient d'ailleurs les objets, se disposent souvent, pour ainsi dire d'eux-mêmes, en Tableaux analogues à ceux dont nous venons de parler.

Considérons, par exemple, le triangle ABC; désignons-en, comme précédemment, les sommets par A, B, C; — les côtés par $a$, $b$, $c$; — les centres des cercles exinscrits par $O_a$, $O_b$, $O_c$; — les rayons de ces mêmes cercles par $r_a$, $r_b$, $r_c$; — les trois hauteurs par $h_a$, $h_b$, $h_c$; — ces signes formeront le Tableau rectangulaire

$$\begin{array}{ccc} A & B & C, \\ a & b & c, \\ O_a & O_b & O_c, \\ r_a & r_b & r_c, \\ h_a & h_b & h_c, \end{array}$$

où les éléments de chaque ligne sont d'une même nature, et où ceux de chaque colonne correspondent à un même sommet. Il y a là, en quelque sorte, *deux classifications superposées.*

On représente d'ordinaire par le symbole $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons simples de $m$ objets $p$ à $p$, en convenant de regarder $C_{m,0}$ comme égal à l'unité. Il est évidemment naturel de former avec tous ces symboles le triangle

$$\begin{array}{cccc} C_{1,0} & C_{1,1} & & \\ C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & \\ C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, in-8°, Paris, 1905, 2e Partie, p. 141.

où les lignes correspondent aux premiers indices, les colonnes aux seconds, et qui n'est autre chose que le *triangle de Pascal*.

J'ai représenté par $P_{n,s}$ et $Q_{n,s}$ les nombres respectifs des permutations rectilignes et des permutations circulaires de $n$ éléments qui présentent chacune $s$ séquences. Il était naturel de disposer, comme je l'ai fait dans mes Mémoires [1], les symboles de ces deux sortes en deux triangles, analogues au précédent.

695. Les *séries périodiques* sont choses assez fréquentes. Telles sont les suites de chiffres qu'on obtient en convertissant en fractions décimales certaines fractions ordinaires. Telles sont la suite des noms des jours, dont la période composée de 7 jours constitue la semaine, et la suite des noms des mois, dont la période composée de 12 mois constitue l'année. Telles sont, dans les courbes représentées par les équations

$$y = \sin x, \qquad y = \sin^3 x - \cos^3 x,$$

les suites formées par les points d'inflexion, par les points situés sur $Ox$, et par les points où les tangentes sont horizontales.

*Il faut évidemment qu'une suite périodique d'objets soit représentée par une suite périodique de signes.* Supposons que la période se compose de trois objets. On pourra désigner les éléments de la première période par $a_1$, $b_1$, $c_1$; ceux de la deuxième par $a_2$, $b_2$, $c_2$; ceux de la troisième par $a_3$, $b_3$, $c_3$; etc.; et disposer tous ces signes de manière à en former le Tableau

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3, & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3, & \ldots \\ c_1 & c_2 & c_3, & \ldots \end{array}$$

qui est rectangulaire, s'étend indéfiniment vers la droite, et doit être lu par colonnes.

696. Il est enfin des cas où l'on écrit des suites non périodiques d'objets, de nombres sous forme de *Tableaux*, uniquement pour *ménager la place*. C'est ce qu'on fait, par exemple, lorsque l'on

---

[1] *Mémoire sur le triangle des séquences* (*Savants étrangers*, in-4°, Paris, 1895, p. 2). — *Mémoire sur les séquences des permutations circulaires* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, in-8°, Paris, 1895, t. XXIII, p. 122-184).

dispose les premiers nombres en un carré pour chercher, d'après la méthode d'Ératosthène [1], ceux d'entre eux qui sont premiers. Évidemment cette disposition est fautive, puisqu'elle établit entre ces nombres des correspondances qui ne jouent aucun rôle dans la question.

### Signes multiples.

697. Dans les exemples qui précèdent, les symboles que nous avons employés sont tous des signes *doubles, triples, quadruples, ...*, qui correspondent à deux, trois, quatre, ... *classifications,* en quelque sorte *superposées*, et qui rappellent ces classifications par 2, 3, 4, ... *indices*. Comme nous l'avons fait observer déjà (219), on peut supprimer la lettre majuscule ou minuscule qui sert de support à ces indices, et remplacer, par exemple, $C_m^p$ et $P_{n,s}$ par $(m, p)$ et $(n, s)$. On peut aussi employer des minuscules différentes affectées chacune d'un indice ou d'un accent. C'est ce que l'on fait lorsqu'on écrit les matrices

$$\begin{matrix} a_1 b_1 c_1 d_1 e_1, & a' b' c' d' e', \\ a_2 b_2 c_2 d_2 e_2, & a'' b'' c'' d'' e'', \\ a_3 b_3 c_3 d_3 e_3, & a''' b''' c''' d''' e'''. \end{matrix}$$

698. Seulement, lorsqu'on emploie ces dernières notations, il faut se bien rappeler que les lettres sans accents ni indices, de même que les lettres affectées de l'indice zéro, ne sont point analogues aux autres et *ne doivent être employées que dans des cas spéciaux*.

Les tables à double entrée

$$\begin{matrix} a & b & c & \quad & a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 & & a' & b' & c' \\ a_2 & b_2 & c_2 & & a'' & b'' & c''. \end{matrix}$$

qui nous présentent chacune les neuf cosinus des angles que forment trois axes rectangulaires de coordonnées avec trois autres axes rectangulaires, sont l'une et l'autre mal écrites, la première ligne de chacune d'elles n'y étant point analogue aux deux lignes suivantes.

---

[1] 275-194 av. J.-C.

### Combinaisons, arrangements.

699. Les groupes d'éléments nommés *arrangements, permutations, combinaisons* peuvent être regardés comme des objets donnés qu'il s'agit de représenter par des signes. A moins que l'on ne tienne compte des cycles, inversions ou séquences qu'ils contiennent, ces groupes sont des *objets analogues* et doivent, par conséquent, être représentés par des *signes analogues*. Comment choisir ces signes?

Évidemment, on ne peut assigner un signe simple à chacun des groupes considérés, car le nombre de ces groupes est fort grand par rapport à celui de leurs éléments. Le plus naturel, c'est d'attribuer une lettre ou un numéro à chacun des éléments entrant dans les groupes, et de représenter le groupe formé de tels ou tels éléments par le groupe que constituent les lettres ou numéros correspondants. En d'autres termes, les arrangements, permutations, combinaisons des éléments donnés seront représentés par les arrangements, permutations, combinaisons des lettres ou numéros qui en désignent les éléments. Le nombre des signes représentant les groupes sera donc juste égal au nombre des groupes; et chaque signe contiendra autant de lettres ou numéros que le groupe correspondant contiendra d'éléments.

700. Il est un cas où ce *nombre de lettres* peut être *diminué*. C'est celui où les groupes donnés sont les combinaisons simples de $m$ objets $p$ à $p$, et où $m-p$ est inférieur à $p$. Dans ce cas, en effet, les combinaisons considérées correspondent chacune à chacune aux combinaisons des $m$ lettres $m-p$ à $m-p$; ces dernières sont en même nombre que les combinaisons $p$ à $p$, mais d'après notre hypothèse elles contiennent moins d'objets. On pourra représenter les combinaisons des $m$ lettres $p$ à $p$ par les combinaisons des $m$ lettres $m-p$ à $m-p$.

Ainsi les combinaisons de $m$ éléments $m-1$ à $m-1$ se représenteront chacune par une *lettre unique*, celle qui correspondra à l'élément manquant dans la combinaison. Les combinaisons de $m$ éléments $m-2$ à $m-2$ se représenteront chacune par *deux let-*

*tres*, celles qui correspondront encore aux deux éléments qui manquent; et ainsi de suite.

**701.** Considérons l'ensemble des signes représentant les arrangements complets $p$ à $p$ de $m$ éléments. Leur nombre est égal à celui, $m^p$, de ces arrangements complets. On peut, d'ailleurs, les disposer d'une façon rationnelle.

Si $p$ est égal à 1, les signes, composés chacun d'une seule lettre, se placeront sur une ligne. — Si $p$ est égal à 2, ils formeront une table à double entrée, un carré. — Si $p$ est égal à 3, ils formeront une table à triple entrée, un cube. — Si $p$ est égal à 4, ils formeront une table à quadruple entrée, c'est-à-dire la figure qui correspond au cube dans l'hyperespace à 4 dimensions.

En général, les signes représentant les arrangements complets de $m$ éléments, pris $p$ à $p$, formeront un *parallélotope* régulier dans l'hyperespace correspondant au nombre $p$. Cette figure aura $p$ dimensions; on pourra dire qu'elle résume une classification à $p$ dimensions, ou, comme précédemment, *$p$ classifications superposées;* on pourra, d'ailleurs, la partager par la pensée, à l'aide de cloisons parallèles à ses faces, en $m^p$ cellules contenant chacune l'un des $m^p$ arrangements complets; chaque cellule appartiendra à $p$ files parallèles aux arêtes de la figure : elle y sera comme en un carrefour.

**702.** Les *combinaisons complètes de 2 lettres, $m$ à $m$*, c'est-à-dire les termes du développement de $(a+b)^m$, abstraction faite de leurs coefficients numériques, forment évidemment le triangle

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & a & & b & & \\ & a^2 & & ab & & b^2 & \\ a^3 & & a^2b & & ab^2 & & b^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

où chaque file d'éléments parallèle au côté gauche du triangle contient une puissance fixe de $b$; chaque file parallèle au côté droit, une puissance fixe de $a$; chaque file parallèle à la base, des termes qui sont, en $a$ et $b$, d'un degré constant.

Les *combinaisons complètes de 3 lettres, $m$ à $m$*, c'est-à-dire les

termes du développement de $(a + b + c)^m$, abstraction faite de leurs coefficients numériques, ont été disposés par M. Laisant en un tétraèdre analogue au triangle précédent.

A l'aide des hyperespaces à 4, 5, 6, ... dimensions, on pourrait disposer rationnellement les *combinaisons complètes, m à m*, de 4, 5, 6, ... éléments.

### Notations systématiques.

**703.** C'est une question, dans une étude un peu compliquée de Géométrie, de savoir s'il faut ou ne faut pas *tracer les figures*. Nous avons parlé (294) des avantages que l'on trouve à ne les pas tracer. Seulement, quand on ne les trace point, il faut apporter un très grand soin dans le *choix des notations;* il faut créer, en quelque sorte, des *notations systématiques*.

On y arrive en représentant les premiers éléments par des *signes simples*, et les objets compliqués par des *signes multiples*, formés des signes simples, assemblés suivant des lois ou conventions fixes.

**704.** Les *signes simples* employés pour les premiers éléments sont d'ordinaire des chiffres, des lettres, affectés d'indices ou d'accents, et placés souvent entre parenthèses ou entre crochets.

On désigne ainsi par A, B, C, D quatre points placés sur une droite $\Delta$, et par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ leurs quatre polaires. — On se donne une surface algébrique $\Sigma$, du degré $n$, contenant une droite D dont le degré de multiplicité est $r$. — On se propose de mener dans un plan, par un point $m$, une tangente à la parabole $(\varpi)$. — On considère le point M où la droite (D) touche la courbe (E).

Dans ce dernier exemple, il est mauvais que la droite et la courbe, qui sont deux objets disparates, soient représentées par deux signes analogues : c'est une mauvaise notation. — Dans cette phrase : « *Le point m décrit la courbe* $(m)$ *qui engendre la surface* $[m]$ », les notations sont, au contraire, très bonnes.

**705.** Il est naturel de représenter par des *signes multiples*, composés de signes simples, les *objets complexes* résultant de la combinaison des premiers éléments.

Un auteur écrit : soient 1, 2, 3, ..., 7 les sept points donnés et (D) la droite d'intersection des plans (1, 2, 3), (4, 5, 6); — je

trouve dans un autre [1] : soient $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ les six sommets de l'hexagone; les trois points $(ab, de)$, $(cd, fa)$, $(bc, ef)$ sont situés sur le pascal $abcdef$ qu'on représente par

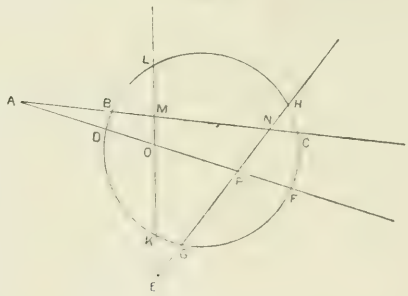
$$\left\{\begin{matrix} ab, & cd, & ef \\ de, & fa, & bc \end{matrix}\right\}.$$

Le premier de ces exemples est excellent, le second a ses lettres mal ordonnées; mais, dans l'un et dans l'autre, les signes multiples sont très clairs et se comprennent d'eux-mêmes.

706. Considérons un polynome complet, c'est-à-dire un système de $n$ droites situées dans un même plan. Qui empêche d'en désigner par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les côtés; par $A_{i,j}$ le point d'intersection des côtés $a_i$, $a_j$; par $A_{h,i}A_{k,l}$ la droite passant par les points $A_{h,i}$, $A_{k,l}$?

Je trouve, dans les *Œuvres de Pascal* [2], la figure ci-dessous qui nous offre quatorze lettres, très mal placées, et formant bien à

Fig. 6.




tort deux groupes de sept lettres consécutives. N'eût-il pas été plus simple de remarquer que cette figure se compose uniquement de deux angles, dont les côtés coupent une circonférence et se coupent entre eux; d'appeler $a$, $b$ les côtés du premier angle; $f$, $g$ ceux du second; $\omega$ la circonférence; et de désigner le point d'intersection de deux quelconques de ces lignes par le couple des deux lettres qui les représentent?

707. *Toute Science qui ne s'occupe que d'un nombre limité*

---

(1) SALMON, *Sections coniques*, in-8°, Paris, 1870, p. 331.

(2) Édition Hachette, in-12, t. III, p. 185.

*d'objets, et qui n'effectue sur eux qu'un nombre limité d'opérations, peut recevoir son algèbre,* c'est-à-dire peut s'étudier à l'aide d'un système particulier de signes idéographiques. Telle est la *Géométrie projective.*

Dans l'excellent Traité qu'il en a donné, Cremona désigne les points par A, B, C, ...; les droites par $a$, $b$, $c$, ...; les plans par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...; puis, par des signes multiples, les points, droites ou plans auxquels les opérations et raisonnements le conduisent. Il désigne : par AB, la droite déterminée par les points A et B; — par A$a$, le plan contenant le point A et la droite $a$; — par $a\alpha$ le point commun à la droite $a$ et au plan $\alpha$; — par $\alpha\beta$, l'intersection des plans $\alpha$ et $\beta$; — par ABC, le plan des trois points A, B, C; — par $\alpha\beta\gamma$, le point commun aux trois plans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Il emploie aussi des signes multiples d'un ordre plus élevé, représentant : par $\alpha$.BC, le point commun au plan $\alpha$ et à la droite BC; — par A.$\beta\gamma$, le plan passant par le point A et la droite $\beta\gamma$; — par $\alpha$.B$c$, la droite d'intersection du plan $\alpha$ et du plan B$c$; — par A.$\beta c$ la droite qui joint le point A au point $\beta c$. — Il se sert même d'égalités pour définir certains objets ou pour en exprimer quelques propriétés. L'égalité

$$\alpha.\mathrm{BC} \equiv \mathrm{A}'$$

indique que le point commun au plan $\alpha$ et à la droite BC est le point A'; — l'égalité

$$u \equiv \mathrm{ABC}$$

signifie que la droite $u$ renferme les points A, B, C.

Ces notations de Cremona, qui sont véritablement des modèles, ont été employées (¹) depuis par plusieurs géomètres et, en quelque sorte, généralisées. On en est arrivé à représenter un nombre arbitraire de constructions successives par la juxtaposition, effectuée suivant certaines lois, des symboles représentant les points, les droites et les plans.

### Rose des vents.

708. Un exemple remarquable de l'emploi des signes multiples est celui que nous offre la *rose des vents.* Cette figure se compose

(¹) CASPARY, *Bulletin de la Société mathématique de France*, in-8°, Paris, 1887.

de trente-deux rayons, partageant l'horizon en trente-deux angles égaux, nommés *aires de vents* ou *rumbs*. Ces rayons correspondent évidemment à trente-deux points partageant la circonférence en trente-deux parties égales. Il s'agissait de désigner tous ces points.

Si l'on faisait abstraction de toutes considérations astronomiques ou géographiques, et que l'on regardât le problème comme un problème de pure Géométrie, les 32 points à désigner seraient 32 *objets analogues*. On ne pourrait les désigner par des lettres consécutives latines ou grecques, puisque chacun de ces alphabets n'en contient que 25 ou 24. Il faudrait avoir recours aux lettres affectées d'indices $A_1$, $A_2$, ..., $A_{32}$. Cette notation aurait ce triple tort : de marquer une *origine;* de présenter un *saut brusque* entre $A_{32}$ et $A_1$; et d'indiquer sur la circonférence un certain *sens de rotation*.

**709.** La façon dont on a procédé est exempte de ces défauts et peut être donnée comme modèle. Prenant pour bases les 4 points cardinaux, Nord, Sud, Est, Ouest, on les a désignés par les initiales N, S, E, O de leurs noms. Ce sont là les quatre signes *simples* qu'on emploie, et à l'aide desquels on forme les signes *multiples* désignant les 28 autres points.

Les 4 points cardinaux partagent la circonférence en 4 arcs égaux ou quadrants. Le milieu de chaque quadrant se désigne par le couple des deux lettres qui en marquent les extrémités. Ces 4 milieux se désignent donc par les signes doubles NE, NO, SE, SO, qu'on prononce Nord-Est, Nord-Ouest, etc.

La circonférence est maintenant partagée en 8 arcs égaux. Le milieu de chacun d'eux se désigne par le couple des signes qui en marquent les extrémités, la première place étant toujours donnée au signe du point cardinal. On obtient ainsi les signes triples NNE, NNO, ENE, ... qu'on prononce Nord-Nord-Est, Nord-Nord-Ouest, Est-Nord-Est, etc.

Les 16 arcs égaux ainsi déterminés doivent être encore partagés chacun en deux parties égales. Le milieu de l'arc qui va du point N au point NNE termine évidemment le premier quart de l'arc qui va du point N au point NE : on le désigne par le signe quadruple $N\frac{1}{4}NE$, que l'on prononce Nord un quart Nord-Est. Le milieu de l'arc qui va du point NE au point NNE termine de même le premier quart de l'arc qui va du point NE au point N : on le désigne par

le signe quadruple NE$\frac{1}{4}$N, qu'on prononce Nord-Est un quart Nord. Et ainsi de suite.

710. Ainsi les 32 points, qui formaient en réalité un ensemble homogène, c'est-à-dire une *seule sorte d'objets,* ont été, pour le choix de leurs signes, partagés en *quatre sortes,* mais l'ont été d'une façon très régulière.

Les 4 points de la première sorte ont seuls été représentés par des signes simples; les 4 de la deuxième l'ont été par des signes doubles; les 8 de la troisième par des signes triples; les 16 de la quatrième par des signes quadruples. Le mode de formation des signes doubles et des signes triples est le même : il pourrait évidemment s'étendre. Celui des signes quadruples en diffère : c'est un défaut. La rose des vents ne nous en présente pas moins un bel exemple de notations.

### Les vingt-sept droites.

711. Sur une *surface algébrique du troisième degré* se trouvent, en général, 27 *droites.* Ces droites sont analogues entre elles : ce sont 27 objets d'une *même sorte.* Elles possèdent, les unes par rapport aux autres, des propriétés remarquables, d'après lesquelles les géomètres les ont groupées de différentes façons : *trièdre* de Steiner, *double-six* de Schläfli [1].

Chacune de ces 27 droites en rencontre 10 autres. Évidemment, il n'y en a jamais plus de 3 dans un même plan; mais il existe 45 plans qui en contiennent chacun 3, de façon qu'elles forment 45 triangles.

712. Dans un système de notations employé par M. Caron [2], on considère d'abord 12 droites,

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6, \end{matrix}$$

qui sont dites *fondamentales* et qui forment deux groupes. Chaque

---

[1] Steiner, 1796-1863; Schläfli, 1814-1895.

[2] *Bulletin de la Société mathématique de France*, in-8°, Paris, 1880, t. VIII, p. 73.

fondamentale ne rencontre aucune droite de son groupe, mais rencontre toutes les droites de l'autre, à l'exception de celle qui présente le même indice.

Prenons maintenant deux fondamentales quelconques, $a_p$, $b_q$, qui se rencontrent; elles déterminent un plan; les deux fondamentales correspondantes $a_q$, $b_p$ en déterminent un autre; et ces deux plans, par leur intersection, nous donnent une droite, dite *secondaire,* qui est située sur la surface et que nous désignons par $(pq)$. En répétant cette opération de toutes les manières possibles, nous obtenons les 15 secondaires

$$(12),\ (13),\ (14),\ (15),\ (16);\quad (23),\ (24),\ (25),\ (26);$$
$$(34),\ (35),\ (36);\quad (45),\ (46);\quad (56);$$

lesquelles, associées aux douze fondamentales, complètent le nombre de vingt-sept. Il est facile de voir qu'une fondamentale et une secondaire se rencontrent, lorsqu'elles ont un indice commun; et que deux secondaires se rencontrent, lorsque leurs quatre indices sont différents.

713. Ces notations sont évidemment fondées sur la considération du *double-six.* Elles se composent de signes de deux sortes : 12 signes simples répondant aux 12 droites fondamentales, et 15 signes composés, qui se déduisent des premiers et répondent aux 15 droites secondaires. Elles nous permettent d'obtenir immédiatement les 10 droites que rencontre l'une quelconque des 27 droites considérées.

Toute *fondamentale* d'un groupe rencontre les 5 fondamentales de l'autre dont les indices diffèrent du sien, et les 5 secondaires qui présentent son indice : la fondamentale $a_3$, par exemple, rencontre les 5 fondamentales $b_1$, $b_2$, $b_4$, $b_5$, $b_6$, et les 5 secondaires

$$(13),\ (23),\ (34),\ (35),\ (36).$$

Toute *secondaire* rencontre les 4 fondamentales qui présentent l'un quelconque de ses indices, et les 6 secondaires qui n'en présentent aucun : la secondaire (25), par exemple, rencontre les 4 fondamentales $a_2$, $a_5$, $b_2$, $b_5$, et les 6 secondaires

$$(13),\ (14),\ (16),\ (34),\ (36),\ (46).$$

Quant aux 45 triangles que forment nos 27 droites, il est évident

que, à l'aide de ces mêmes notations, on en pourrait établir le tableau complet.

### Les polyèdres réguliers.

714. Les polyèdres nous offrent au moins trois sortes d'éléments : des *sommets*, des *arêtes* et des *faces*. On pourrait représenter chacun de ces éléments par une lettre unique, prise telle quelle ou affectée soit d'indices, soit d'accents. Mais, de quelque manière qu'on les choisisse, les signes simples constitués par ces lettres ne sauraient exprimer les positions des éléments d'une sorte par rapport aux positions de ceux des deux autres. Il vaut beaucoup mieux n'employer les signes simples que pour les éléments d'une ou de deux sortes, et représenter les éléments restants par des signes multiples formés de ces signes simples. C'est ce que nous allons faire pour les *polyèdres réguliers convexes;* c'est ce qu'on pourrait faire aussi pour les polyèdres réguliers de Poinsot [1], et pour les polyèdres semi-réguliers de Catalan.

715. Les polyèdres réguliers convexes sont au nombre de *cinq :* le *tétraèdre,* l'*hexaèdre* ou *cube,* l'*octaèdre,* le *dodécaèdre* et l'*icosaèdre*. Ils peuvent tous être inscrits et circonscrits à la sphère. Si l'un quelconque est inscrit de cette façon et que, par tous ses sommets, on mène des plans tangents à cette surface, on obtient un polyèdre régulier convexe. Les polyèdres de cette espèce *se correspondent donc* deux à deux : le *tétraèdre* se correspond à lui-même; l'*octaèdre* correspond au *cube;* et l'*icosaèdre* au *dodécaèdre*.

716. Dans le *tétraèdre*, les sommets et les faces sont en même nombre, 4, et sont opposés chacun à chacune. Les 4 sommets pourront être représentés par les majuscules A, B, C, D, et les 4 faces opposées par les minuscules $a$, $b$, $c$, $d$ : au total 8 signes simples. Quant aux 6 arêtes, chacune pourra être représentée par un signe double formé : soit des deux majuscules marquées aux deux sommets qu'elle joint; soit des deux minuscules répondant

---

[1] Né en 1777, mort en 1859.

aux deux faces dont elle est l'intersection. — Il est, d'ailleurs, évident qu'on eût pu désigner les sommets par $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ et les faces opposées par $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$.

717. Le *cube* nous offre 6 faces, 8 sommets, 12 arêtes. Nous en représenterons les sommets par des signes simples qui seront des lettres, et les autres éléments par des signes multiples composés de ces lettres. Chaque arête sera donc représentée par 2 des lettres précédentes, et chaque face par 4 de ces mêmes lettres.

Mais comment placer les 8 lettres assignées aux 8 sommets du cube? Si l'on ne veut introduire aucune dissymétrie, le problème est difficile. Je le résous en remarquant que ces 8 sommets se partagent en 2 *groupes de* 4, et que les 4 sommets de chaque groupe sont ceux d'un *tétraèdre régulier*. J'appelle alors $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ les sommets du premier groupe; $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ les sommets du second; les lettres de même indice, sur le cube, se rapportant toujours à 2 sommets opposés.

Puisque l'*octaèdre régulier* correspond au cube, il nous offre 8 faces, 6 sommets, 12 arêtes; et ces 8 faces se partagent aussi en 2 groupes, les 4 faces de chaque groupe appartenant à un même tétraèdre régulier. On nommera $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ les faces du premier groupe; et $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ les faces du second. Les autres éléments se désigneront par des signes multiples, tous composés des minuscules qu'on vient d'écrire.

718. Le *dodécaèdre régulier* est, on le sait, le dodécaèdre *pentagonal*. Il nous offre 12 faces, 20 sommets, 30 arêtes. Nous en désignerons chaque sommet par une lettre; puis chaque arête par 2 de ces lettres, et chaque face par 5. Toute la difficulté consistera à bien choisir et placer les 20 lettres des sommets.

Comme dans le *cube*, ces sommets se partagent *en groupe de* 4, les 4 sommets d'un même groupe appartenant à un même *tétraèdre régulier*. Ces groupes seront au nombre de 5. Nous en désignerons les sommets par les cinq groupes de lettres

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4, \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4, \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4. \end{array}$$

Les notations de l'*icosaèdre régulier* s'en déduiront immédiatement. Ce seront cette fois les 20 faces qui se partageront en 5 groupes de 4, les 4 faces de chaque groupe étant toujours celles d'un même tétraèdre régulier. On désignera les faces du premier tétraèdre par $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$; celles du deuxième par $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$; et ainsi de suite. Les autres éléments recevront des signes multiples.

**719.** Les procédés qui précèdent reposent tous sur le *groupement, 4 par 4*, des sommets dans le *cube* et le *dodécaèdre*, des faces dans l'*octaèdre* et l'*icosaèdre*. Ce groupement, que je n'ai vu nulle part, est peut-être nouveau. Il domine toute la question. Pour qu'on le puisse mettre à profit, il suffit de savoir comment, dans le cube et le dodécaèdre, on peut déduire, d'un sommet donné quelconque, les 3 autres sommets du tétraèdre régulier dont il fait partie.

Dans le *cube*, un sommet donné quelconque appartient à 3 faces; ces faces sont des carrés; dans chacun d'eux, il y a un sommet opposé au sommet donné : ce sont ces 3 sommets qu'il lui faut associer.

Dans le *dodécaèdre*, considérons un sommet quelconque A et suivons l'une AK des arêtes qui en partent. Son extrémité K appartient à un pentagone dont A ne fait point partie; et, dans ce pentagone, le côté opposé à K nous présente deux sommets, P à droite, Q à gauche. Puisqu'il y a 3 arêtes partant de A, il existe trois couples de points tels que P et Q. Si nous associons à A les trois points de droite, nous obtenons les 4 sommets d'un premier tétraèdre régulier; si nous lui associons les trois points de gauche, nous obtenons les 4 sommets d'un second tétraèdre. Le problème est ainsi résolu; et il admet *deux* solutions.

Pour ce qui est du partage en groupes de 4, soit des 8 faces de l'octaèdre, soit des 20 faces de l'icosaèdre, il se déduit immédiatement du partage, en groupes de 4, des sommets, soit du cube, soit du dodécaèdre.

D'ailleurs, dans nos notations des sommets et des faces de nos polyèdres, si l'on supprimait tous les *indices* qui affectent les lettres, on trouverait finalement, sur le dodécaèdre, par exemple, 4 lettres A,

4 lettres B,..., et ces lettres seraient toutes placées de la même manière sur la figure, y joueraient toutes le même rôle : en particulier, les 5 lettres placées autour d'une face seraient toutes différentes; elles y constitueraient l'une des permutations circulaires des 5 lettres considérées.

# TROISIÈME PARTIE.

## USAGE.

720. Les signes des objets une fois choisis, il convient de les employer de la façon la plus avantageuse. C'est à enseigner la manière de s'en servir très bien qu'est consacrée entièrement cette troisième et dernière Partie. Nous nous y occupons d'abord de l'assemblage des signes choisis : écriture des expressions, expressions mal écrites, structure des expressions, expressions abrégées ou condensées, notations particulières; — ensuite de la comparaison des expressions entre elles : relations, relations continues, systèmes d'équations; — enfin de la manière dont il convient de s'inspirer des notations pour bien utiliser le mécanisme algébrique : notations initiales des problèmes, mise en équations, direction des calculs, vérifications.

Quelques paragraphes de cette troisième Partie rappellent encore des paragraphes de la première. Comme dans notre deuxième Partie, nous avons préféré des résumés très courts à de simples renvois.

# CHAPITRE I.

## ÉCRITURE DES EXPRESSIONS.

### Signes simples.

721. Supposons *choisis,* conformément à nos règles, *les signes simples* dont nous avons besoin. Il s'agit de les *bien employer;* en premier lieu, de les *bien écrire*. Nous rappellerons à ce sujet les préceptes que nous avons donnés.

722. Tout *signe simple,* considéré isolément, doit être *très visible;* c'est-à-dire doit être vigoureux, de dimensions assez grandes, et de contour bien arrêté. Sa *forme* doit être franche et décidée, exempte de tout trait superflu, de tout ornement, de tout ce qui en pourrait faire un *caractère de fantaisie*.

C'est ainsi qu'il faudra tracer : les chiffres arabes; — les lettres soit latines, soit grecques; — les signes d'opérations, de coordination, de fonctions, de relations; — les lettres employées pour désigner les points des figures, les variables et les constantes de l'analyse, les objets des sciences physiques; — les signes de tout genre qui servent à la rédaction d'un ouvrage : appels de note, de paragraphe, de planche, de figure, d'expression, d'équation; — enfin les signes idéographiques nouveaux qu'on se sera trouvé dans la nécessité de créer.

723. Il ne faudra jamais oublier que *deux signes* quelconques, lettres ou chiffres, employés en même temps, doivent présenter une *différence suffisante*. Les *meilleurs signes*, avons-nous dit (21, 110), sont ceux *qui ne risquent point d'être confondus*.

On ne devra jamais, en traçant un signe, *omettre* ou *atténuer* aucun des *détails* qui le caractérisent. On ne supprimera jamais,

par exemple, ni la barre de la lettre $t$, ni les points des lettres $i$ et $j$. On tracera toujours la transversale des signes négatifs de relation de façon qu'elle soit très forte, très marquée.

On aura grand soin surtout de former très bien les caractères que nous avons signalés comme se ressemblant trop ; d'exagérer les traits par lesquels ils diffèrent ; d'exagérer, par exemple, la différence de grandeur des majuscules et minuscules qui nous présentent des formes identiques. Le signe $\int$ de l'intégrale et la caractéristique $f$ des fonctions, qui sont souvent presque juxtaposés, peuvent donner lieu à des confusions : ils doivent différer à la fois par leur forme et par leur grandeur.

### Éléments modificateurs.

**724.** Lorsque les chiffres ou lettres seront affectés de menus éléments *modificateurs,* accents, indices, petits traits placés au-dessus ou au-dessous, ces menus éléments devront toujours être : *assez grands* pour qu'on n'éprouve aucune difficulté à les percevoir ; — *placés* de telle manière qu'il n'y ait nul doute sur le rôle qu'ils remplissent ; — *séparés* enfin du signe qu'ils modifient par un vide assez petit, mais très net.

**725.** Il en sera ainsi : pour les accents des dérivées ; — pour les exposants des puissances ; — pour les indices des variantes ; — pour ceux des combinaisons et arrangements ; — pour les lettres ou chiffres placés en indices et indiquant les valeurs attribuées aux variables ; — pour les limites, inférieure et supérieure, des lettres $\Sigma$ ou $\Pi$ ; — et pour celles, par conséquent, des intégrales définies, que ces dernières limites soient d'ailleurs placées, par rapport au signe $\int$, l'une en haut et à droite et l'autre en bas et à droite aussi, ou bien l'une au-dessus et l'autre au-dessous.

Il en sera de même des abréviations marquant les unités dans les nombres qui mesurent les quantités de toute nature. Qu'on ne marque qu'une seule unité, comme dans les longueurs, surfaces, . . . , ou qu'on en marque plusieurs, comme dans les durées et les angles, le modificateur devra toujours être placé à la droite et en haut du nombre, et en être nettement séparé.

Les petits traits droits placés au-dessus d'une lettre pour indiquer la valeur absolue d'un nombre ou la valeur algébrique d'un vecteur; — le petit trait droit placé au-dessus d'un chiffre pour indiquer la caractéristique négative d'un logarithme; — les petits traits droits ou courbes, placés au-dessus de couples de lettres et indiquant des cordes ou des arcs; — les flèches placées de même pour montrer une direction; — les sortes d'accents circonflexes qui marquent les angles; — les petits traits et les astérisques indiquant que la dernière décimale d'une mantisse est approchée par excès ou par défaut; — tous ces menus éléments sont autant de *modificateurs* qui doivent être aussi très *visibles*, très bien *placés*, et très nettement *séparés* du signe principal.

726. Nous avons dit (142, 403) *qu'il fallait éviter le plus possible les modificateurs trop nombreux et trop compliqués*, notamment les indices multiples, les indices affectés de menus modificateurs, les indices qui consisteraient en expressions, et, *a fortiori*, ceux qui consisteraient en égalités ou inégalités.

### Éléments significatifs ou non.

727. Dans ma théorie générale des signes, j'ai appelé *éléments non significatifs* les éléments qui, par eux-mêmes, dans l'ensemble où ils figurent, ne possèdent pas de signification qui leur soit propre; et, au contraire, *éléments significatifs* ceux qui, par eux-mêmes, en possèdent une.

Les lettres des caractéristiques sn, log, tang sont toutes, lorsqu'on les considère isolément, des éléments non significatifs; les facteurs du produit *abc* sont, au contraire, des éléments tous significatifs, et il en est de même des modificateurs que nous venons de considérer.

*Les éléments non significatifs doivent toujours être réunis; les éléments significatifs, toujours être séparés.*

728. Considérons les caractéristiques des fonctions. Comme nous venons de le faire remarquer, leurs éléments ne sont point significatifs. Voilà pourquoi nous avons conseillé (227, 443, 513) de les

lier entre eux; de constituer toute caractéristique à l'état de monogramme.

Le double point indicateur de la division; le groupe de quatre points que nous présente l'ancien algorithme des proportions; les signes d'égalité, de congruence, d'équipollence, d'identité sont des signes tous formés de deux ou plusieurs éléments non significatifs et pourtant séparés : c'est un défaut irrémédiable qu'il nous faut accepter.

729. Les produits de plusieurs facteurs, tels que $3abc$; les nombres écrits en chiffres, tels que 5637, ont tous leurs éléments significatifs. Ces éléments doivent donc être séparés par des vides assez petits, mais très perceptibles. *Il ne faut jamais,* nous l'avons dit (22), *lier entre eux les chiffres d'un nombre comme on lie entre elles les lettres d'un mot.*

La virgule des nombres décimaux; le point indicateur de la multiplication; les signes d'opérations, de coordination, de fonctions, de relations, étant tous des éléments significatifs, doivent tous être précédés et suivis de légers vides, les séparant des éléments immédiatement voisins.

**Alignement.**

730. Les éléments, significatifs ou non, composant les signes complexes doivent toujours occuper, les uns par rapport aux autres, des positions bien nettes; ils doivent surtout être *bien alignés.*

Ces mots bien alignés signifient que ces éléments doivent être tous placés sur une ligne droite horizontale, qu'on appelle la *ligne principale* de l'écriture. Ce sont les éléments ou signes simples contenant un seul trait horizontal qui, par la position donnée à ce trait, fixent la position de cette ligne. Tels sont le signe $+$, le signe $-$, et la barre horizontale des rapports ou fractions. De là, la nécessité de placer tous ces signes simples de telle sorte que leurs barres horizontales soient bien en face les unes des autres; que la barre de fraction, en particulier, soit bien à la même hauteur que la barre horizontale du signe $+$ ou $-$ qui la précède ou la suit; qu'elle soit bien horizontale; qu'on ne la trace jamais en biais.

731. Le double signe $\pm$, qui contient deux barres horizontales,

se placera de façon que la ligne principale de l'écriture passe entre ces deux barres. Il en sera de même des signes $=$, $\equiv$, $\equiv$, $\perp\!\!\!\perp$. Les angles $>$, $<$, qui constituent les signes positifs simples d'inégalité, auront leur bissectrice sur la ligne principale de l'écriture. Les signes négatifs de relation $\neq$, $\not>$, $\not<$, les signes doubles $\gtrless$, $\geqq$, $\leqq$ devront être partagés par cette même ligne en deux parties symétriques ou, tout au moins, d'égale importance.

Il en sera de même des signes . ou $\times$ de la multiplication; du signe : de la division; du signe $\sqrt{\phantom{x}}$ de la racine. De même des signes de groupement, c'est-à-dire des parenthèses et des crochets. De même encore des lettres, des chiffres, du signe $\infty$; en un mot, de la presque totalité des signes employés en Mathématiques.

Évidemment les numérateurs et dénominateurs des fractions; les limites supérieures et inférieures des symboles $\Sigma$, $\Pi$, $\int$; les exposants, les accents, les indices, etc., devront être placés au-dessus ou au-dessous de la ligne principale. Il ne faudra jamais que leur position par rapport à cette ligne puisse donner lieu à aucune hésitation.

### Éléments bien calibrés.

732. Non seulement les éléments significatifs réunis pour former un signe complexe doivent être bien alignés; mais ils doivent posséder encore des qualités multiples. En parlant de la manière de les choisir, nous avons dit, en particulier, qu'il serait mauvais d'employer en même temps des caractères italiques et des caractères romains, ou, plus généralement, des variétés différentes d'un même alphabet. Nous n'avons pas à revenir sur ces conseils puisque, présentement, nous supposons les caractères choisis, et ne nous occupons que de les bien écrire. Ce qu'il faut surtout, dans l'écriture, c'est que tous ces caractères, lettres ou chiffres, soient *bien calibrés*, c'est-à-dire possèdent tous la même grandeur, le *même corps* : on ne doit jamais *parangonner*.

733. Le corps de la lettre ou chiffre devra être celui des minuscules *e*, *u*, *m*. Tous ces corps de lettres ou chiffres devront être, en quelque sorte, inscrits entre deux droites, parallèles à la ligne prin-

cipale de l'écriture et comprenant cette ligne. Certaines lettres des alphabets latin et grec dépassent l'intervalle compris entre ces parallèles, quelques-unes vers le haut, d'autres vers le bas, d'autres à la fois vers le haut et le bas. Ces diverses circonstances devront être nettement marquées; mais il ne faudra point que les traits sortant ainsi de l'intervalle deviennent trop longs et empiètent sur les lignes voisines. *A fortiori,* ne faudra-t-il point que les lettres et chiffres, placés au-dessus ou au-dessous de la barre de fraction, en arrivent jamais à la traverser.

734. Une lettre trop grande, une majuscule par exemple, placée au milieu de minuscules, produit, en général, un mauvais effet : cet effet est surtout déplorable, lorsque cette majuscule est placée en exposant ou en indice. Mais, le choix étant fait, nous n'avons qu'à le subir. Ce que nous devons éviter en écrivant, c'est de donner sans raison de trop grandes dimensions à certains caractères. Je sais un Livre où les coefficients numériques sont beaucoup plus grands que les minuscules qu'ils multiplient; où l'on écrit, par exemple, $\sin 2\alpha$. C'est une véritable faute.

On peut indiquer de trois façons différentes la multiplication de deux facteurs : par le simple rapprochement de ces facteurs; par un point placé entre eux; par le signe $\times$. Nous pouvons, en général, prendre indifféremment l'une ou l'autre. Toutefois, il est bien évident que le signe $\times$ a des dimensions trop grandes. Il figure dans chacun des produits

$$(a-b-c)\times(a-b+c),$$
$$1\times 2\times 3\times\ldots\times(p-1).$$

On aurait dû le supprimer dans le premier et, dans le second, le remplacer constamment par un point.

### Signes à formes multiples.

735. C'est une *faute* de représenter dans un même paragraphe, et *a fortiori* dans une même expression, un *même objet* par *deux signes différents*. Lorsqu'une lettre telle que $\pi$ ou $\mathfrak{h}$ possède deux formes distinctes, on ne doit point employer tantôt l'une, tantôt

l'autre. Il est donc mauvais de représenter un même nombre tantôt par $a$, tantôt par A. Il le serait même d'y employer tour à tour un a droit et un $a$ penché, ou, plus généralement, deux formes différentes d'une même lettre, empruntées à deux variétés différentes d'un même alphabet.

Le chiffre 3 et le chiffre 5 possèdent l'un et l'autre, surtout dans l'écriture manuscrite, deux formes différentes. Il ne faut point les employer concurremment.

On écrit, en chiffres romains, tantôt VIII, tantôt VIIj : il faut opter. *Un signe qui se présente plusieurs fois doit toujours se présenter sous la même forme.*

736. Les diverses manières d'indiquer la multiplication conduisent souvent à des fautes du genre de celles que nous étudions. Considérons les deux produits

$$m(m-1)(m-2)\ldots 2.1,$$
$$m(m-1)(m-2)\ldots 2\times 1.$$

Au commencement de chacun d'eux, la multiplication est indiquée par le simple rapprochement des facteurs; elle l'est à la fin, dans le premier par un point, dans le second par le signe $\times$. Il eût été plus régulier de l'indiquer partout par un point, ou de n'écrire à la fin de ces produits que le seul facteur 1.

Dans l'expression

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p},$$

qui nous donne le nombre des combinaisons simples de $m$ objets $p$ à $p$, nous trouvons la même faute, car la multiplication n'y est point indiquée en haut comme en bas. Cette faute toutefois est moins grave, car les deux modes différents d'indication ne s'y trouvent point dans le même produit.

737. Elle l'est, ce me semble, encore moins dans les expressions

$$pqr\ldots\times pqr\ldots,$$
$$P_n\times\frac{2nR}{\sqrt{4n^2R^2-P_n^2}},$$

où l'emploi du signe $\times$ a même cet avantage de bien séparer les

quantités dont on indique le produit. On eût pu cependant écrire la première de ces expressions sous la forme

$$(pqr\ldots)(pqr\ldots);$$

et, dans la seconde, remplacer le signe $\times$ par un simple point.

Quant à l'expression

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d},$$

que nous avons déjà signalée (162), et où la division est indiquée de deux manières différentes, on ne doit pas la regarder comme fautive. Elle est, à la fois, plus brève et plus précise que celle qu'on obtiendrait en écrivant le second rapport au-dessous du premier.

### Séparations entre les éléments.

**738.** Les éléments, significatifs ou non, qui composent une expression algébrique, doivent toujours être nettement réunis ou séparés. Il ne faut pas que le lecteur puisse, à cet égard, avoir la moindre hésitation.

Un élément *non significatif,* nous l'avons dit (727), ne doit jamais être isolé : il sera donc *nettement réuni* à l'un au moins des éléments qui le comprennent. Au contraire, *deux éléments significatifs* doivent *toujours être séparés;* seulement les vides laissés entre eux seront de grandeurs fort inégales : ils devront être nettement égaux ou inégaux.

**739.** Le vide séparant un *modificateur* quelconque, accent, exposant ou indice, de la quantité qu'il affecte devra être *très petit.* Il en sera de même de celui qui, dans tang$x$, sépare la caractéristique tang de la variable $x$; ou, dans log sin$x$, la caractéristique log de la caractéristique sin. De même encore du vide qui sépare deux facteurs d'un produit où le signe de la multiplication manque. Nous l'avons fait remarquer (154), c'est afin de pouvoir rapprocher les facteurs d'un produit que l'on a remplacé par un point, ou supprimé tout à fait, le signe $\times$ de la multiplication.

**740.** Dans les suites d'éléments un peu nombreux, il y a avantage

à distribuer les éléments en *différents groupes* séparés par des *vides*. C'est surtout par cette distribution que l'on arrive à mettre en évidence la composition ou, comme nous disons, la structure des expressions. Présentement, nous nous bornerons à faire remarquer que les vides séparant les différents groupes contribuent à la clarté, et établissent, dans les longues expressions, des sortes de *repos* qui soulagent l'œil et l'esprit.

Les chiffres arabes servant à écrire les grands nombres sont ainsi partagés en groupes de trois chiffres : les vides qui séparent deux de ces groupes doivent être évidemment plus grands que ceux qui séparent les chiffres d'un même groupe.

Chose remarquable, les personnes qui écrivent avec soin partagent même en plusieurs groupes les nombres dont l'expression en chiffres romains leur paraît un peu longue : l'Imprimerie Royale écrit le millésime 1847 sous cette forme M DCCC XLVII.

**741.** C'est seulement dans l'un des Chapitres suivants que nous nous occuperons de plusieurs expressions considérées ensemble. Mais nous dirons, dès à présent, que les vides séparant *deux expressions* voisines doivent être *beaucoup plus grands* que ceux qui séparent *deux éléments,* quels qu'ils soient, d'une même expression. Ce n'est qu'en faisant précéder et suivre chaque expression d'un vide assez grand qu'on met cette expression en évidence. Voilà pourquoi on est conduit à écrire une expression tant soit peu longue sur une ligne à part, au milieu même de cette ligne. Une expression convenablement isolée montre d'elle-même son unité, son individualité.

# CHAPITRE II.

## EXPRESSIONS MAL ÉCRITES.

### Vides trop grands.

742. Nous avons dit que les vides séparant les éléments d'une même expression ne doivent pas être tous égaux, et que certains d'entre eux doivent être très petits. Les fautes qui consistent à donner à ces derniers une étendue trop grande sont rares dans les manuscrits; dans les imprimés elles sont plus fréquentes : elles y paraissent toujours être ce qu'elles y sont en effet le plus souvent, des fautes d'impression.

743. Quand on supprime le signe de la multiplication entre deux facteurs d'un produit, c'est afin, disons-nous sans cesse (154), de rapprocher ces facteurs. L'expression

$$U_{p-1} - U_p \quad U_1 - U_{p-1},$$

que je copie dans un Ouvrage récent, est donc tout à fait mal écrite : les deux facteurs $U_p$, $U_1$ y sont séparés par un vide trop grand.

Les menus modificateurs doivent être très rapprochés des signes qu'ils modifient. Il est bien clair que dans

$$f''_u \quad {}^2,$$

l'exposant de l'indice $u$ en est beaucoup trop éloigné.

Dans la différentielle totale

$$f'_u\, du - f'_v\, dv - f'_w\, dw,$$

les indices des dérivés sont encore trop éloignés des caractéristiques $f'$. Mais à cette première faute s'en ajoute une seconde : ils sont trop rapprochés des différentielles qui suivent ces dérivées; ils

paraissent appartenir à ces différentielles, en être des indices placés à gauche et en bas.

744. Au point de vue de la pratique, les fautes de cette sorte ne sont pas très graves; elles ne produisent guère d'erreurs; le lecteur les corrige immédiatement, de lui-même. Il faut cependant les éviter avec le plus grand soin, tant elles rendent l'écriture incohérente et lui donnent un vilain aspect.

### Signes trop rapprochés.

745. Les *vides séparatifs* doivent toujours être *assez grands*. Dans la suite

$$a \quad b \quad a\,x - b \quad y + z \quad z - c,$$

que forment les six éléments de la première ligne d'un déterminant, on se demande si la seconde lettre $a$ ne multiplie pas $x$; elle en est trop rapprochée.

Dans la suite des trois équations

$$a = q^m \quad b = q^n \quad ab = q^{m+n},$$

les intervalles laissés entre elles sont trop petits.

Il en est évidemment de même, malgré la présence des virgules, dans la suite des binomes

$$1,\ 1 + \frac{1}{7},\ 1 - \frac{3}{7},\ \ldots.$$

Je lis dans un Traité d'Arithmétique « *combien font*

6 et 7, 9 et 8, 6 et 9? »

ne semble-t-il pas que cette suite nous présente le nombre fractionnaire 7,9 et le nombre fractionnaire 8,6?

746. Les nombres ou quantités qui figurent dans une expression, une équation, un calcul doivent souvent satisfaire à de certaines conditions, à de certaines restrictions. Il ne faut point que ces conditions ou restrictions soient écrites dans le voisinage immédiat de ces expressions, équations ou calculs. Je lis dans un Ouvrage excel-

lent : « *les valeurs comprises entre deux nombres* $a$ et $b$ ($a < b$) ».
Je trouve dans un de nos meilleurs Recueils mathématiques

$$t = \frac{\alpha z - \beta}{\beta_0 z + \alpha_0} \quad (\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1).$$

Ne voit-on pas, sur ces deux exemples, que la parenthèse finale est beaucoup trop rapprochée du nombre ou de l'équation qui la précède? N'en devrait-elle pas être fort écartée?

**747.** La phrase « *assujettissons cette intégrale à s'annuler pour une valeur donnée de* $x$, $x = a$, » nous présente évidemment une faute du même genre : les deux lettres $x$ qui se suivent y sont trop rapprochées.

Je rencontre cette ligne :

« *Or, dans* ACP, $AC^2 = x^2 + y^2 \ldots$ ».

qui doit se lire

« *Or, dans le triangle* ACP, ... ».

Ce groupe ACP ne devrait-il pas être séparé par un grand vide de l'équation qui le suit?

Dans cette autre phrase « *Pour reconnaître si un entier N est divisible par un autre M, M. Perrin a donné ...,* » ces deux M majuscules, tout à fait identiques, ne sont-ils pas encore trop rapprochés?

**748.** Ces signes rapprochés presque jusqu'au contact, lorsqu'ils devraient être nettement séparés, non seulement forment un ensemble d'aspect désagréable, mais en arrivent à causer des erreurs. Je trouve dans un très bon Ouvrage, au milieu du texte : *le point* F $(a, b)$, *le point* M $(x, y, z)$. Ne semble-t-il pas qu'on ait affaire à des fonctions? L'auteur a voulu dire : le point F, de coordonnées $a$ et $b$; le point M, de coordonnées $x$, $y$, $z$. Sa manière d'écrire est plus brève, mais infiniment moins claire. *En matières difficiles, on ne doit jamais sacrifier la clarté à la brièveté.*

Il conviendrait peut-être, lorsqu'on écrit des expressions mathématiques au milieu d'un texte, de séparer toujours, par un ou plusieurs mots tirés du langage ordinaire, les expressions mathématiques qu'il y aurait inconvénient à rapprocher trop.

### Ordre des éléments.

749. On doit prendre grand soin de placer dans un *ordre convenable* les éléments composant une expression quelconque. L'oubli de cette précaution peut causer de véritables erreurs.

750. Nous sommes naturellement conduits à croire que les caractéristiques des fonctions portent sur tout ce qui les suit; que, par exemple, dans $f(x, y)p$, dans $2f(x)y^2$, la caractéristique $f$ porte même sur le facteur final, soit $p$, soit $y^2$. On prévient cette faute en plaçant ce facteur en avant du signe $f$; en écrivant la première expression $pf(x, y)$, et la seconde $2y^2f(x)$.

Il en sera de même des produits

$$f(x)(y-z), \qquad \sin a.x,$$

qu'on écrira respectivement

$$(y-z)f(x), \qquad x \sin a.$$

De même encore des expressions

$$\sqrt{a+b}\,x, \qquad \sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}},$$

qui représentent des produits et qu'il conviendra d'écrire

$$x\sqrt{a+b}, \qquad x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2p}.$$

751. La caractéristique $d$ de la différentielle présente plus que toute autre l'inconvénient dont nous venons de parler. Il ne faudra donc jamais remplacer $f(x)\,dx$ par $dx\,f(x)$, ni $(a+b)\,dx$ par $dx(a+b)$.

Bien qu'on écrive sous la forme

$$A(X-x)+B(Y-y)=0$$

l'équation d'une droite passant par le point $x, y$, on écrira toujours sous la forme

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0$$

celle de la normale à une courbe au point $x, y$.

D'ailleurs, dans les différentielles, soit isolées, comme $\operatorname{arc\,tang} x\,dx$,

soit soumises au signe $\int$, comme dans $\int \sin x \cos x \, dx$, c'est toujours le facteur $dx$ qui doit terminer l'expression, qui en doit marquer la fin.

Ainsi, nous le voyons, même dans un produit qui ne dépend point de l'ordre de ses facteurs, *cet ordre,* pour la bonne écriture, *ne saurait être indifférent.*

752. Il existe, d'ailleurs, des expressions où le changement d'ordre des éléments conduit à des fautes graves. C'est ce qui arriverait si l'on remplaçait $a - b$ par $b - a$; et de même $\frac{a}{b}$ par $\frac{b}{a}$. Je rencontre, dans un *Traité de Géométrie analytique*, l'équation

$$x = \frac{ab}{c},$$

où la lettre $x$ désigne la quatrième proportionnelle aux trois longueurs $a$, $b$, $c$ : c'est une faute grave, tenant à l'interversion des lettres $c$ et $a$, puisque cette quatrième proportionnelle est, en réalité, égale à $\frac{bc}{a}$.

### Éléments omis.

753. L'*omission,* la *suppression* d'un élément est une faute qui peut avoir les plus fâcheuses conséquences. Dans chacune des expressions

$$7\,{}^{2}/_{3}, \qquad 7\,\frac{2}{3},$$

doit-on voir une somme ou un produit? D'après les conventions que nous avons faites (45), la première, dont la barre est en biais, équivaut à $7 + \frac{2}{3}$; la seconde, dont la barre est horizontale, équivaut à $7 \times \frac{2}{3}$. Mais, pour ceux qui ignorent ces conventions, qu'est-ce que ces expressions signifient au juste?

754. L'*omission* des signes de séparation est également grave. Supprimez la virgule dans $f(x, y)$, le lecteur croit avoir affaire, non plus à une fonction de deux variables, mais à une fonction du

seul produit $xy$. Supprimez le point-et-virgule ou la barre droite dans les expressions

$$\mathrm{Ser}_\rho(u_0;\ u,\ v,\ w),$$

$$\mathcal{F}[\,z\,|\,\zeta(x-a_1),\ \zeta(x-a_2),\ \ldots,\ \zeta(x-a_p)\,],$$

vous faites disparaître la distinction entre les deux groupes de quantités ou fonctions. *Il importe, quand une expression dépend de deux groupes de quantités, que ces deux groupes soient nettement séparés.*

755. L'*oubli* des signes de groupement n'est pas moins dangereux. Il produit des erreurs graves et malheureusement fréquentes. Je trouve, dans une publication considérable, l'équation

$$\int_c \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = 0.$$

Ne fallait-il point que le binome qui suit le signe $\int$ fût placé entre parenthèses?

Dans ses Leçons de Mathématiques [1], écrivant le nombre des combinaisons simples de $m$ objets 3 à 3, Lacaille [2] le met sous la forme

$$\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3},$$

oubliant de placer entre parenthèses chacun des facteurs $m-1$, $m-2$.

Bien plus, dans un Traité récent sur le calcul des probabilités, l'auteur, ayant à représenter le produit des $n-k$ premiers nombres, l'écrit $n-k!$ Ne fallait-il pas que le signe de la factorielle portât sur le binome $n-k$ tout entier et, par conséquent, que ce binome fût placé entre parenthèses?

Au reste, nous l'allons voir, les *signes de groupement*, parenthèses, crochets, etc., sont, pour la bonne écriture mathématique, d'une *importance capitale*.

---

(1) *Leçons de Mathématiques*, in-8°, Paris, 1784, p. 209.

(2) Né en 1713, mort en 1762.

### Signes de groupement.

756. Il ne sera point inutile de rappeler ici les conseils que nous avons donnés sur la façon de bien employer les *signes de groupement* proprement dits : traits droits, parenthèses, crochets.

757. Il importe que le *trait droit* soit bien délimité, que l'on voie bien s'il porte sur telle lettre, tel chiffre. C'est ce qui a lieu dans la double inégalité

$$\overline{1,4}^{3} < 3 < \overline{1,5}^{3},$$

qu'on peut regarder comme bien écrite. L'expression

$$\overline{a+bc}$$

est, au contraire, fautive, car on ne voit pas nettement si la lettre $c$ multiplie le binome $a+b$ ou la seule lettre $b$. Il la faut écrire sous la forme

$$(a+b)c,$$

qui exclut toute hésitation.

C'est évidemment le souci d'éviter une faute de ce genre dans l'emploi du trait droit qui a fait écrire l'expression

$$\left|\overline{1+\frac{pp}{bb}}\right|^{\frac{1}{2}},$$

que je rencontre dans une traduction française du calcul intégral de Maclaurin [1].

758. *Il ne faut jamais superposer des parenthèses de même forme.* Si une première parenthèse est comprise dans une seconde, la première sera une parenthèse proprement dite, et la seconde un crochet. C'est ce qui arrive dans l'égalité

$$F[y, y', (x)] = 0,$$

qu'on peut regarder comme le type de l'équation différentielle du premier ordre.

---

[1] In-8°, Paris, 1765, p. 98.

On représentera par un simple trait ou une simple parenthèse le signe de groupement qui n'en contient aucun autre. Il serait presque mauvais d'y employer un crochet. Dans l'équation

$$\left[\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right]^2 = 1 - \sin a,$$

le crochet était inutile. — Dans son célèbre Mémoire sur l'expression des coordonnées de la Lune, Delaunay [1] place entre crochets les coefficients de tous les sinus, bien que quelques-uns d'entre eux ne contiennent aucune parenthèse.

### Emploi singulier des signes de groupement.

759. Lorsque les *signes de groupement* sont employés pour montrer que certaines notations ne sont point prises dans leur *sens ordinaire,* il est bien évident qu'ils ne peuvent *être supprimés.* Lorsque je représente par $y^{(3)}$ la dérivée troisième de la fonction $y$; lorsque je représente par $(a+b+c)^{(3)}$ le cube symbolique du trinome $a+b+c$, si je supprimais la parenthèse qui enserre le chiffre 3, ce chiffre perdrait sa signification exceptionnelle de numéro d'ordre dans le premier cas, d'exposant symbolique dans le second, pour reprendre sa signification ordinaire de véritable exposant.

La puissance symbolique que nous venons de citer se représente assez souvent d'ailleurs par la notation

$$((a+b+c))^3,$$

où le trinome s'écrit à l'intérieur d'une parenthèse double. Cette parenthèse double suffit alors à indiquer qu'il s'agit d'une opération symbolique; mais, l'exposant n'étant point écrit d'une façon spéciale, il serait très mauvais de la remplacer par une parenthèse simple. Il ne faut point non plus remplacer par une parenthèse simple la parenthèse double à l'intérieur de laquelle, depuis Cauchy et à son exemple, on place souvent les expressions qui possèdent des déterminations multiples.

---

[1] *Connaissance des Temps*, in-8°, Paris, 1865.

**760.** Les *parenthèses* et *crochets* s'emploient aussi parfois pour mettre une quantité en *évidence,* pour attirer l'attention sur elle. C'est ce qui a lieu dans les expressions

$$\sin(26^\circ 33'), \qquad \arccos(\cos\alpha).$$

Ces parenthèses et crochets pourraient être supprimés. Mais il n'en saurait être de même lorsque la quantité placée dans la parenthèse n'est autre chose qu'une lettre ou un chiffre, par exemple $+x$ ou $-7$, précédé de l'un des signes $+$ ou $-$. On écrira donc, avec la parenthèse,

$$\arcsin\left(+\frac{1}{2}\right), \qquad (+x)\times(+x).$$

La suppression de cette parenthèse conduirait le plus souvent à écrire deux signes d'opération à la suite l'un de l'autre, sans aucun intermédiaire, écriture très mauvaise puisqu'on n'opère point sur des signes d'opération, puisqu'on n'établit point d'équations entre opérations. Cette faute cependant est assez souvent commise. Je trouve imprimées les expressions

$$\times -\frac{1}{8}x, \qquad (a+b)\times -m,$$

qui sont évidemment mal écrites.

J'ai lu je ne sais plus où les égalités

$$+\times -=+, \qquad +\times -=-,$$
$$-\times +=-, \qquad -\times -=+,$$

par lesquelles un auteur résumait les règles concernant les signes, dans la multiplication des monomes. Il est bien évident que ce n'étaient point là des égalités véritables. On eût pu dire, au plus, pour expliquer mais non pour justifier l'emploi de ces écritures, que c'étaient des relations, des égalités purement *mnémoniques*.

### Expressions ambiguës.

**761.** Il ne faut pas qu'on puisse jamais hésiter sur la façon dont les éléments d'une expression quelconque doivent être traités dans

les calculs; en d'autres termes, il ne faut pas qu'une expression quelconque soit *ambiguë*, soit susceptible de recevoir deux significations différentes. Ce sont surtout l'ordre où l'on écrit les éléments et l'emploi des signes de coordination qui permettent de lever toute indécision, de supprimer toute ambiguïté.

**762.** Considérons l'expression $\sin x(y-z)$. Représente-t-elle le sinus de $x(y-z)$, ou le produit de $\sin x$ par $y-z$? — Si elle représente le sinus du produit $x(y-z)$, il convient de l'écrire $\sin[x(y-z)]$. Si elle représente le produit de $\sin x$ par $y-z$, il faut l'écrire $(\sin x)(y-z)$ ou bien, d'une façon préférable, $(y-z)\sin x$.

**763.** Nous avons vu qu'il fallait bien distinguer l'un de l'autre, par la manière même de les écrire, la cinquième puissance de $\sin x$ et le sinus de $5x$. Il faut éviter aussi que cette cinquième puissance de $\sin x$ puisse se confondre avec le sinus de $x^5$. Si le chiffre 5 est placé, dans le premier cas à une hauteur indécise, dans le second au-dessus de la lettre $x$, l'expression devient ambiguë. Dans ce dernier cas, on lève toute ambiguïté en écrivant $(\sin x)^5$. C'est ce que faisait Callet [1].

**764.** La notation des différentielles, comme celle des différences, produit parfois de graves ambiguïtés. Considérons les expressions

$$dx^2, \qquad \Delta x^2.$$

Représentent-elles la différentielle et la différence de $x^2$, ou le carré de la différentielle et de la différence de $x$? On les regarde habituellement comme représentant ce carré.

Une imprimerie mathématique célèbre indique la différentielle et la différence de $x^2$ par les notations

$$d.x^2, \qquad \Delta.x^2,$$

où un point précède $x^2$. Il vaudrait mieux, selon nous, faire usage des parenthèses. Si l'on écrit, dans le premier cas

$$d(x^2), \qquad \Delta(x^2),$$

---

[1] *Tables portatives de logarithmes*, in-8°, Paris, 1795, p. 27.

dans le second

$$(dx)^2, \qquad (\Delta x)^2,$$

toute ambiguïté disparaît.

### Nouvelles expressions ambiguës.

765. L'expression $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ que nous avons signalée déjà peut être comprise de *deux manières,* puisque c'est, selon les cas, la barre inférieure ou la supérieure qui doit y être regardée comme la *barre maîtresse*. Ainsi que nous l'avons dit (43, 163), il suffit, pour faire disparaître l'indécision, de donner à cette barre maîtresse une plus grande longueur, ou de la placer bien exactement sur la ligne principale de l'écriture. C'est le premier de ces procédés qu'on emploie quand on écrit $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ ; c'est le second, quand on écrit

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \ldots.$$

Il est évident qu'on obtiendrait le même degré de précision par l'emploi des parenthèses en écrivant suivant les cas

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}.$$

766. L'expression $a^{bc}$ est de même une expression *ambiguë.* Elle est, en effet, susceptible de deux significations différentes. Mais elle n'en souffre plus qu'une lorsqu'on l'écrit

$$(a^b)^c \qquad \text{ou} \qquad a^{bc},$$

en faisant usage des parenthèses.

767. Les deux expressions

$$a + b : c + d, \qquad b - a : c - a,$$

par lesquelles on a noté si souvent deux rapports, sont l'une et

l'autre *ambiguës*, pouvant nous présenter l'une et l'autre plusieurs interprétations différentes. La première, par exemple, peut s'écrire de chacune de ces manières :

$$(a \div b) : (c \div d), \qquad [(a \div b) : c] \div d,$$
$$[a \div (b : c)] \div d, \qquad a \div (b : c) \div d,$$
$$a \div [(b : c) \div d], \qquad a \div [b : (c - d)];$$

et il en est évidemment de même de la seconde.

Les auteurs, ayant en vue d'exprimer deux rapports, auraient dû écrire, à l'aide des parenthèses,

$$(a \div b) : (c \div d), \qquad (b - a) : (c - a);$$

ils auraient, en opérant ainsi, supprimé toute ambiguïté.

768. On s'est demandé en Allemagne [1] si l'expression

$$a : b \times c$$

était correcte, si elle n'était pas susceptible de plusieurs interprétations. Il est évident qu'elle peut en recevoir deux, mais qu'elle cesse d'être ambiguë dès qu'on lui donne l'une ou l'autre de ces formes,

$$(a : b) \times c, \qquad a : (b \times c),$$

lesquelles conduisent, d'ailleurs, lorsqu'on effectue les calculs, à des résultats très différents.

Le trinome

$$a.b : c,$$

qui ressemble si fort au précédent, est susceptible aussi de deux interprétations. Il peut se mettre, en effet, sous chacune de ces deux formes précises,

$$(a.b) : c, \qquad a.(b : c);$$

seulement ici, en effectuant les calculs, on arrive à des résultats identiques : les deux expressions sont équivalentes.

Il est à remarquer, d'ailleurs, que si, dans chacun de nos deux trinomes,

$$a.b : c, \qquad a.b : c,$$

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques* de Darboux, in-8°, Paris, 1882, p. 299.

on eût supprimé le point de la multiplication, on fût arrivé aux deux expressions

$$a : bc, \qquad ab : c,$$

qui ne présentent, selon nous, aucune ambiguïté.

769. Quoi qu'il en soit, on a eu bien raison de le dire : *il ne faut point économiser les parenthèses* (¹). Certaines sont nécessaires et ne sauraient être supprimées. Dans la plupart des exemples que nous venons de donner, celles que nous avons écrites sont évidemment la condition même de la précision et de la clarté.

## Pléonasmes.

770. Dans des *éléments d'Algèbre* (²) qui eurent leur heure de célébrité, on fait remarquer que chacune des quatre expressions

$$\frac{(a-b)}{(c-d)}, \quad \left(\frac{a-b}{c-d}\right), \quad \frac{a-b}{c-d}, \quad (a-b):(c-d)$$

représente le quotient de $a-b$ par $c-d$. On eût pu ajouter qu'elle le représente sans ambiguïté. Mais, dans les deux premières, les parenthèses sont inutiles, la barre horizontale du rapport remplissant fort bien, outre son rôle habituel, celui de signe de groupement. Toutefois, ces parenthèses n'ont d'autre inconvénient que de charger l'écriture; l'emploi qu'on en fait n'est point fautif; il ne constitue qu'un *pléonasme*.

771. Abstraction faite de l'exposant fractionnaire $\frac{1}{2}$, la racine carrée de $a+b$ peut s'écrire de ces trois manières,

$$\sqrt{(a-b)}, \quad \sqrt{a-b}, \quad \sqrt{(a-b)},$$

dont aucune n'est ambiguë, mais dont la troisième nous offre un *pléonasme* analogue à ceux dont nous venons de parler. Cette troisième expression nous présente, en effet, deux signes de groupement, le trait et la parenthèse, dont chacun rend l'autre inutile.

---

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques* de DARBOUX, in-8°, Paris, 1882, p. 290.
(²) Bᵒⁿ REYNAUD, *Éléments d'Algèbre*, in-8°, Paris, 1850, p. 5.

772. Considérons l'angle que forment entre eux les deux axes OX, OY. Le cosinus de cet angle peut encore s'indiquer de ces trois manières,

$$\cos\widehat{OX, OY}, \quad \cos(OX, OY), \quad \cos(\widehat{OX, OY}),$$

qui sont toutes exemptes d'ambiguïté, mais dont la dernière nous présente encore un *pléonasme,* la parenthèse et l'accent circonflexe y remplissant le même rôle, puisque l'accent y peut être regardé comme un vrai signe de groupement.

773. Ainsi, nous venons d'en voir trois exemples, certaines notations nous présentent de véritables pléonasmes. Elles n'en deviennent point fautives; les expressions qu'elles constituent, et qu'on pourrait nommer expressions *surabondantes,* en sont seulement un peu alourdies.

### Régularité des notations.

774. Pour parvenir à écrire *bien,* il faut s'efforcer d'écrire dans la *perfection;* il faut être attentif aux fautes les plus petites; il faut arriver à en être choqué.

C'est l'usage de supprimer, dans l'écriture, le coefficient 1, l'exposant 1, l'indice 2 de la racine carrée. Cette faute, qui passe le plus souvent inaperçue tant nous y sommes habitués, devient en certains cas très visible. Il est clair qu'il vaudrait mieux : dans la somme

$$a + 2b + 3c + 4d,$$

écrire le coefficient 1 de $a$; — dans la suite

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots,$$

écrire l'exposant 1 de 3; — dans le trinome

$$\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c},$$

écrire l'indice 2 du premier radical.

775. L'expression

$$\frac{c'}{z-c} + \frac{c''}{(z-c)^2} + \frac{c'''}{(z-c)^3} + \ldots + \frac{c^{(n)}}{(z-c)^n}$$

est bien écrite; elle deviendrait parfaite si l'on y rétablissait l'exposant 1 du premier dénominateur.

La série harmonique a pour termes les inverses des nombres entiers successifs. C'est un tort de l'écrire

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots,$$

en y supprimant le dénominateur 1 du premier terme.

La série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

a pour termes les inverses des carrés de ces mêmes nombres. Il faut se garder, comme dans le cas précédent, d'y supprimer le premier dénominateur.

776. La série convergente qui représente le nombre $e$ s'écrit parfois

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots;$$

je la trouve même sous cette forme :

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$

Ce sont là deux fautes graves. Cette série doit s'écrire

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$

Ce mode d'écriture est d'autant plus imposé que cette série $e$ n'est qu'un cas particulier de la série

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots;$$

qui représente $e^x$.

Cette dernière série, d'ailleurs, n'est elle-même qu'un cas particulier de la série de Maclaurin, laquelle doit toujours s'écrire

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots.$$

avec la factorielle 1! comme dénominateur de $x$.

Chose curieuse, dans un Livre déjà ancien [1], la série $e$ s'écrit

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots.$$

Il y a ici double faute : remplacement des deux premiers termes par le seul nombre 2; suppression dans toutes les factorielles du facteur initial 1.

**777.** Nous avons déjà vu comment, dans les suites un peu longues, il faut avoir soin de faire suivre d'un signe + ou — le dernier terme écrit, et de placer entre deux signes de cette sorte le terme isolé qu'on appelle le *terme général*. Il faut donc écrire, non pas

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} \ldots,$$

mais

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

Nous avons vu aussi qu'il était mauvais, malgré l'exemple de Laplace, de remplacer dans ces expressions les suites de points par l'abréviation etc. ou &.

**778.** Je trouve, dans une Note manuscrite, le produit

$$[1.n][2.(n-1)][3.(n-2)]\ldots[(n-1).2][n.1].$$

Il est bien clair que, dans le premier comme dans le dernier facteur, le crochet est inutile. Faut-il cependant le supprimer et le remplacer par une simple parenthèse? Il convient, selon nous, de le laisser; car sa présence donne à l'expression tout entière une plus grande régularité. C'était peut-être à ce besoin de régularité qu'obéissait Delaunay (758), lorsqu'il plaçait entre crochets certaines expressions qui ne contenaient aucune parenthèse.

Quoi qu'il en soit, la *régularité* dans l'écriture des expressions *est une qualité d'importance capitale, qu'il faut toujours rechercher.*

---

[1] Lefébure de Fourcy, *Leçons d'Algèbre*, in-8°, Paris, 1845, p. 525.

# CHAPITRE III.

## STRUCTURE DES EXPRESSIONS.

### Monomes entiers.

779. Un monome est un produit de plusieurs facteurs. Il importe que ces facteurs soient écrits dans un certain *ordre* et non pas au hasard. Cet ordre doit rendre manifestes : l'*importance* des différents facteurs ; leur *partage* en plusieurs sortes; en un mot, leur mode de *classification*.

780. Si ces facteurs sont tous de *même sorte,* on les écrira simplement les uns contre les autres, en suivant l'ordre alphabétique des lettres qui les représentent. On écrira ainsi : le monome $abc$; le monome $a^\alpha b^\beta c^\gamma$.

S'il existe un facteur *numérique,* c'est-à-dire un coefficient, on le placera tout au commencement, exemple $5a^2bc$.

S'il existe un coefficient numérique, des facteurs littéraux, et une *fonction* soit déterminée, soit indéterminée, l'on donnera toujours la première place au coefficient, et l'on rejettera la *fonction* à la dernière. On écrira ainsi

$$\frac{1}{2}ab\sin C, \qquad 3(a-b)\log x, \qquad 4yf(x).$$

Nous venons de voir l'inconvénient qu'il y aurait à placer la fonction au commencement de l'expression, ou seulement au milieu.

781. Lorsque le monome comprendra deux sortes de facteurs, par exemple les facteurs $a$, $b$, $c$ et les facteurs $p$, $q$, $r$, on pourra, pour les bien séparer, écrire le produit complet sous l'une des formes

$$abc.pqr, \qquad (abc)(pqr).$$

Le produit des deux monomes $7a^2b$ et $8p^3q$ s'écrira de même de l'une de ces manières :

$$7a^2b.8p^3q, \qquad (7a^2b)(8p^3q).$$

Dans ce mode d'écriture, le produit complet est *indiqué,* mais non pas *effectué :* il n'en est que plus clair. Un produit indiqué montre sa composition, son intérieur; c'est un tout en quelque sorte *transparent.* Quelle différence, pour la clarté, entre le produit indiqué

$$(b+c)(c+a)(a+b)$$

et le polynome

$$(b+c)a^2+(c+a)b^2+(a+b)c^2+2abc$$

qu'on obtient en effectuant les calculs! Voit-on seulement sur ce polynome qu'il est un produit de plusieurs facteurs? *Il faut le plus souvent, en Algèbre, se borner à indiquer les calculs :* on ne les doit effectuer que quand on y est contraint.

### Monomes fractionnaires.

782. Considérons le produit de l'inverse de $a$ par l'inverse de $x+y$. Ce produit peut s'écrire de ces trois manières :

$$\frac{1}{a}\,\frac{1}{x+y}, \qquad \frac{1}{a(x+y)}, \qquad \frac{1}{ax+ay}.$$

Dans la première, il est simplement *indiqué;* dans la deuxième, il est à moitié effectué; dans la troisième, il l'est tout à fait. D'après ce qui précède, c'est la première qu'il faut *préférer.*

783. Lorsqu'on résout un triangle connaissant le côté $a$, l'angle opposé A et l'un B des angles adjacents, le côté inconnu $b$ est donné par le produit

$$a\,\frac{\sin B}{\sin A} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a\sin B}{\sin A}.$$

Toujours d'après ce qui précède, c'est la première de ces expressions, celle où le calcul n'est qu'indiqué, qui est, selon nous, la *meilleure.* Elle l'est ici pour une raison nouvelle, fondée sur la

considération de l'homogénéité de dimensions, de l'*homogénéité géométrique*. En effet, le produit considéré représente une longueur; il est naturel que cette longueur soit exprimée à l'aide d'une *longueur connue* multipliée par un *facteur numérique connu :* la longueur connue est $a$; le facteur numérique connu est le rapport de $\sin B$ à $\sin A$.

784. Cette considération d'*homogénéité* s'étend à l'expression de l'inconnue dans toutes les *règles de trois,* soit simples, soit composées. Les problèmes usuels ainsi dénommés consistent tous en ceci : « *Une quantité variable dépend de plusieurs autres,* » *auxquelles elle est directement ou inversement proportion-* » *nelle; elle possède la valeur* $Q_1$ *lorsque les autres quantités* » *ont les valeurs* $a_1, b_1, \ldots, \lambda_1, \mu_1, \ldots$; *quelle valeur prendra-* » *t-elle lorsque ces autres quantités prendront respectivement* » *les valeurs* $a_2, b_2, \ldots, \lambda_2, \mu_2, \ldots$ ? » Cette valeur est donnée par l'expression

$$Q_1 \frac{a_2 b_2 \ldots}{a_1 b_1 \ldots} \frac{\lambda_1 \mu_1 \ldots}{\lambda_2 \mu_2 \ldots},$$

dans laquelle l'homogénéité de dimensions est parfaitement en évidence. La quantité cherchée, en effet, s'y présente comme égale à une *quantité de même nature*, multipliée par un ou plusieurs *facteurs purement numériques*.

### Polynomes ordonnés.

785. La manière la plus naturelle, la plus simple et aussi la plus usitée d'écrire les fonctions algébriques et entières d'une variable, c'est-à-dire les polynomes entiers, c'est de les *ordonner* suivant les puissances croissantes ou décroissantes de cette variable. On écrit ainsi, suivant les puissances décroissantes,

$$ax^2 + bx + c,$$
$$x^3 + px^2 + qx + r,$$
$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots.$$

786. Il va sans dire qu'un polynome ainsi ordonné ne doit présenter qu'un seul terme de chaque degré. S'il en présentait plusieurs

du degré $p$, il faudrait y mettre $x^p$ en facteur commun, et les réduire en un seul, soit à l'aide des parenthèses, soit à l'aide des traits verticaux dont nous avons précédemment (193) parlé. En particulier, un polynome bien ordonné ne doit présenter qu'un seul terme constant. Il est mauvais d'écrire

$$x^2 + ax + h + k;$$

il faut réunir les deux derniers termes et écrire

$$x^2 + ax + (h + k).$$

787. On dit qu'un polynome ordonné est *complet* lorsque les exposants de deux termes consécutifs n'y diffèrent jamais que d'une unité. S'il n'en est pas ainsi, le polynome est *incomplet*. Il est souvent utile de laisser des *vides* aux places qu'occuperaient les termes manquants. C'est ce que l'on fait notamment pour la multiplication, la division et l'extraction des racines des polynomes incomplets.

788. Un nombre écrit en chiffres, dans une base quelconque, n'est qu'un *polynome entier* ordonné par rapport aux *puissances décroissantes* de cette base. Ce polynome a tous ses coefficients entiers, inférieurs à la base et affectés du signe $+$; mais on pourrait s'y servir aussi, comme certains ont proposé de le faire, de chiffres les uns positifs, les autres négatifs. Il est, d'ailleurs, à remarquer que, grâce à l'emploi systématique du zéro, ce polynome est toujours *complet*.

### Coefficients des polynomes ordonnés.

789. Il est évident qu'en tout polynome ordonné les coefficients d'une part et les exposants de l'autre forment deux suites d'éléments qui se correspondent chacun à chacun. Ces *correspondances* doivent être indiquées par les notations. Elles le sont assez peu dans les exemples qui précèdent, puisque A, B, C, ... y correspondent à $m$, $m - 1$, $m - 2$, .... Ces faibles indications suffisent cependant, parce que, dans ces exemples, on ne considère que des termes *peu nombreux*.

Lorsque les termes sont en assez *grand nombre,* les correspondances doivent être indiquées avec précision, à l'aide, par exemple, d'*indices* affectant les coefficients. C'est ce qui a lieu, mais de manières différentes, dans les polynomes

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$
$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m,$$

puisque l'indice et l'exposant qui se correspondent, dans le premier, sont égaux et, dans le second, nous offrent une somme constante, qui constitue une sorte d'homogénéité.

Dans le cas où le nombre des termes est un peu *grand,* la notation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots$$

doit donc être préférée à la notation

$$A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \ldots.$$

Par contre, la notation

$$A_0 x^m + A_1 x^p + A_2 x^q + \ldots$$

serait avantageusement remplacée par chacune de celles-ci,

$$A x^m + B x^p + C x^q + \ldots.$$
$$A_m x^m + A_p x^p + A_q x^q + \ldots;$$

et surtout par cette troisième,

$$M x^m + P x^p + Q x^q + \ldots.$$

**790.** Cette dernière façon d'écrire est celle qu'on emploie le plus souvent dans la démonstration de la *règle des signes* de Descartes. Un polynome étant ordonné suivant les puissances décroissantes de $x$, on en distribue les termes consécutifs en groupes tels que tous les termes d'un même groupe soient affectés d'un même signe, le premier terme de ce groupe étant précédé, et le dernier suivi, d'un terme de signe contraire. Dans chaque groupe, on n'écrit d'ailleurs que le premier terme, sauf dans le dernier groupe où l'on écrit les deux termes extrêmes. Le polynome nous présente alors cet aspect,

$$M x^m + \ldots - N x^n - \ldots + P x^p + \ldots \pm S x^s \pm \ldots \pm T x^t,$$

où les coefficients M, N, P, ..., S, T sont pris en valeur absolue et *correspondent* de la façon la plus précise aux exposants $m$, $n$, $p$, ..., $s$, $t$.

### Correspondances entre les éléments.

**791.** Les polynomes que nous venons de considérer ne présentaient que *deux* sortes d'éléments se correspondant chacun à chacun. On en trouve *trois* dans le développement

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots$$

de la fonction $f(x)$ par la formule de Maclaurin : les exposants de $x$, les factorielles en dénominateur, les numéros d'ordre des dérivées. Dans cet exemple, ces trois sortes d'éléments ont des signes qui se correspondent très bien.

Il en est de même dans les développements de tang$x$ et de séc$x$ lorsqu'on les écrit respectivement sous ces formes :

$$\begin{array}{l} A_1 \dfrac{x}{1!} + A_3 \dfrac{x^3}{3!} + A_5 \dfrac{x^5}{5!} + \ldots \\ A_0 \quad + A_2 \dfrac{x^2}{2!} + A_4 \dfrac{x^4}{4!} + \ldots \end{array}$$

Les éléments correspondants, qui sont aussi de trois sortes, y sont encore très bien notés. Ces éléments sont : les exposants de $x$, les factorielles en dénominateur, les différentes valeurs de l'entier $A_n$, lequel n'est autre chose, comme je l'ai démontré [1], que la moitié du nombre des *permutations alternées* de $n$ éléments.

**792.** Les rapports tels que

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'}$$

nous présentent encore *trois* sortes d'éléments correspondants : les exposants de $x$, les coefficients du numérateur, les coefficients du dénominateur. L'exemple ci-dessus est mal noté, car l'absence

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, in-4°, Paris, 3e série, t. VII, p. 167-184.

d'accent établit, entre les coefficients du numérateur et les puissances de la variable, une analogie qui n'existe point entre ces mêmes puissances et les coefficients du dénominateur. On peut faire disparaître cette faute de plusieurs manières, notamment en écrivant ce rapport sous l'une ou l'autre de ces deux formes :

$$\frac{a'x^3 + b'x^2 + c'x - d'}{a''x^3 + b''x^2 - c''x + d''}, \qquad \frac{\alpha x^3 - bx^2 + cx - d}{\alpha x^3 + \beta x^3 - \gamma x - d}.$$

**793.** Le rapport

$$\frac{\alpha x - \beta y - \gamma z}{\alpha - \beta - \gamma}$$

est évidemment bien écrit; et il en est de même, sous la forme qu'on leur donne ordinairement, de tous les rapports analogues qui se rencontrent en *statique,* dans la recherche du *centre de gravité.*

Quant au rapport

$$\frac{A' + B'\sqrt{a} + C'\sqrt{b} - \ldots}{A'' - B''\sqrt{a} + C''\sqrt{b} - \ldots},$$

les *trois* sortes d'éléments A', B', C', ..., A'', B'', C'', ..., $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, ... s'y correspondraient très bien, n'était le retard des radicaux sur leurs coefficients.

**794.** Les deux imaginaires

$$a_1 + b_1 i, \qquad a_2 + b_2 i$$

qu'on emploie simultanément sont bien écrites, car leurs termes se correspondent d'une façon très nette. Au contraire, les deux binomes

$$a^2 + pb^2, \qquad c^2 - pd^2$$

le sont mal, et il en est de même des deux trinomes

$$x^2 + ax + K, \qquad x^2 + a'x - K.$$

On connaît l'identité

$$(a^2 - b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 - (ad - bc)^2.$$

Ne serait-il pas bon d'y remplacer les deux binomes qui figurent à son premier membre par les deux binomes

$$a_1^2 + b_1^2 \qquad a_2^2 - b_2^2.$$

qui permettraient de bien voir comment les carrés figurant au second membre sont l'un et l'autre composés?

### Cas de plusieurs variables.

795. Considérons les fonctions algébriques entières à *plusieurs variables,* c'est-à-dire les polynomes entiers en $x, y, \ldots$. Ils présentent parfois un grand nombre de termes; mais, lors même qu'ils n'en présentent qu'un petit nombre, ces termes doivent être disposés convenablement; ils doivent être distribués en *groupes* très nets, placés entre parenthèses, et se succédant suivant une loi simple.

796. Soit $f(x, y, z)$ un polynome de degré $m$ en $x, y, z$. On placera : dans un premier groupe, les termes du degré $m$; dans un deuxième, ceux du degré $m-1$; dans un troisième, ceux du degré $m-2$; et ainsi de suite. Ces groupes homogènes se représenteront par

$$\varphi_m(x, y, z), \quad \varphi_{m-1}(x, y, z), \quad \varphi_{m-2}(x, y, z), \quad \ldots.$$

Si l'on n'avait à s'occuper que des trois premiers d'entre eux, on pourrait les écrire

$$\varphi(x, y, z), \quad \chi(x, y, z), \quad \psi(x, y, z),$$

en supprimant tout indice.

Le polynome particulier

$$x^4 + xz^3 + y^4 + x^3 + x^2y + z^3$$

se partagerait ainsi en deux groupes et s'écrirait

$$(x^4 + xz^3 + y^4) + (x^3 + x^2y + z^3).$$

Une fonction symétrique et entière de $x, y, z$ se partagerait de même en groupes homogènes, qui se suivraient dans l'ordre des degrés décroissants. On écrirait, par exemple,

$$(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy),$$

en commençant par les termes du troisième degré et finissant par ceux du second.

Il est évident qu'on en arrive ainsi à n'avoir plus à considérer

que des polynomes *homogènes,* que des *formes*. Reste à étudier le mode d'écriture de ces formes, et la façon dont leurs termes doivent être ordonnés et groupés.

**797.** On distribue les termes de la forme en groupes symétriques ou, plutôt, en groupes ne contenant que des termes *du même type*. La forme quadratique ternaire en $x$, $y$, $z$ s'écrira

$$(Ax^2 + By^2 + Cz^2) + 2(Pyz + Qzx + Rxy);$$

et la forme cubique ternaire complète,

$$(Ax^3 + By^3 + Cz^3) + 3[x^2(P_1y + P_2z) \\ + y^2(Q_1z + Q_2x) + z^2(R_1x + R_2y)] + 6Txyz.$$

On peut remarquer, sur ce second exemple, qu'il faut parfois *superposer* les signes de groupement. Par contre, lorsque le nombre des termes est très petit, ces signes peuvent être *supprimés*. On écrit sans parenthèse

$$a^2 + b^2 - 2ab.$$

Quant aux coefficients *numériques* qu'on place devant certains groupes, ce sont les coefficients des termes correspondant au type de ces groupes dans le développement de la *puissance* d'un certain polynome. Dans la forme ternaire de degré $m$, les termes du type $Ax^py^qz^r$ auront tous pour coefficient numérique le coefficient de $x^py^qz^r$ dans le développement de $(x + y + z)^m$. Dans les formes binaires, ces coefficients seront ceux du développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un binome. Quoi qu'il en soit, l'emploi de ces coefficients numériques offre une utilité réelle, notamment pour le calcul des dérivées successives des formes.

**798.** Mais comment ordonner les termes, tous de même type, constituant chacun des groupes? C'est là un problème difficile, qui se ramène à la manière d'ordonner les combinaisons. Quant au coefficient littéral correspondant à chaque terme, on le représente souvent par une lettre unique affectée d'autant d'indices qu'il y a de variables dans la forme, ces variables étant toujours placées dans le même ordre, et ces indices n'étant autres choses que leurs exposants. On peut écrire ainsi, dans une forme ternaire, en supprimant

d'ailleurs le facteur numérique commun,

$$A_{0,q,r}\,y^q z^r + A_{0,r,q}\,y^r z^q + A_{q,0,r}\,x^q z^r + A_{r,0,q}\,x^r z^q + \ldots,$$

l'indice o représentant toujours l'exposant de la variable qui manque. Je trouve dans un Ouvrage excellent, sous la forme

$$a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2,$$

le trinome du second degré aux deux variables $x$ et $y$.

799. Il est, d'ailleurs, évident que, s'il s'agissait d'écrire le quotient de deux polynomes analogues à ceux qui précèdent, il suffirait d'appliquer, à chacun de ces polynomes, les règles que nous venons de donner.

### Combinaisons de $n$ objets $n-1$ à $n-1$.

800. Nous avons vu (594) que, pour nommer les combinaisons de $n$ objets $n-1$ à $n-1$, le mieux était de prendre, pour le nom de chaque combinaison, le nom même de l'objet *manquant* ou un mot rappelant ce nom. De même, on ordonnera ces combinaisons en s'appuyant sur la considération de ce même objet manquant. Si les objets combinés sont les lettres $a$, $b$, $c$, ..., on écrira en premier lieu le groupe où manque $a$; en deuxième, celui où manque $b$, et ainsi de suite. La somme des produits 2 à 2 des nombres $a$, $b$, $c$ s'écrira

$$bc + ca + ab;$$

et celle des produits 3 à 3 des nombres $v$, $x$, $y$, $z$,

$$xyz + yzv + zvx + vxy.$$

On écrira de même

$$yz(y+z) + zx(z-x) + xy(x+y)$$

De même encore

$$(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2,$$

cette dernière somme nous présentant à la fois les combinaisons 2 à 2, et des 3 lettres $x$, $y$, $z$ et des 3 lettres $a$, $b$, $c$.

Les produits dont les facteurs sont les combinaisons de $n$ objets

$n-1$ à $n-1$ s'ordonneront suivant les mêmes principes. On écrira

$$(y+z)(z-x)(x+y),$$
$$(b+c)(c-a)(a-b),$$

$$(b+c-d)(c-d+a)(d+a+b)(a+b+c).$$

**801.** On peut rapprocher des combinaisons de $n$ objets, $n-1$ à $n-1$, les *groupes de n objets* où un *objet unique* est traité d'une *façon spéciale,* les $n-1$ autres étant traités symétriquement. On ordonnera par la considération de l'objet unique. On écrira ainsi

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c),$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}},$$

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}-\frac{c^3}{(c-a)(c-b)};$$

et de même, pour les groupes composés de 4 éléments,

$$(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)(a+b+c-d).$$

**802.** Quant à *l'ordre* où il convient de placer les objets composant *chaque groupe,* on peut le déterminer de deux manières. Ou bien en laissant les lettres à leurs places naturelles, et faisant porter la marque distinctive de l'objet unique sur la première lettre, puis sur la deuxième, ..., comme on le fait dans ce produit :

$$(-\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(+\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})(+\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}).$$

Ou bien en déduisant chaque groupe du précédent par *permutation circulaire,* comme on le fait dans

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Le premier de ces procédés ne donne pas toujours un résultat très net. On ne distingue pas, par exemple, du premier coup d'œil, que les facteurs du produit

$$(bcd)(acd)(abd)(abc)$$

sont les combinaisons 3 à 3 des 4 lettres $a$, $b$, $c$, $d$. Il conviendrait peut-être de mettre une *étoile* à la place de chaque objet manquant

et d'écrire

$$(\star\, bc\, d)(a \star c\, d)(ab \star d)(abc \star).$$

Le second procédé, au contraire, donne toujours des expressions très nettes. Il est de plus fort avantageux : d'abord, il soulage l'attention en réduisant l'écriture à une sorte de *mécanisme;* ensuite, il fournit de lui-même une *vérification,* puisque, appliqué au dernier groupe, il redonne le premier.

803. Si simples, d'ailleurs, que soient les règles qui précèdent, elles sont constamment enfreintes. Dans la somme

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x),$$

les groupes sont mal ordonnés. Dans le produit

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a),$$

non seulement les facteurs sont en un mauvais ordre, mais on ne voit pas comment on passe d'un facteur au suivant.

### Combinaisons, arrangements, permutations.

804. Les combinaisons de $n$ objets $n-1$ à $n-1$ sont le cas le plus simple et le plus facile de la question qui nous occupe. Prise dans toute sa généralité, cette question peut s'énoncer ainsi : *ordonner en série linéaire l'ensemble des combinaisons, arrangements, permutations qu'une expression peut nous présenter.* C'est là un problème difficile qui exigerait de longs développements. Nous nous bornerons à indiquer quelques-uns des procédés qui permettent de le résoudre.

805. D'abord les termes à ordonner se partagent en deux sortes : ceux où l'ordre est indifférent et peut être changé; ceux où l'ordre est déterminé et, par conséquent, invariable. Les combinaisons appartiennent à la première sorte; les arrangements et les permutations appartiennent à la seconde. Mais, puisque dans la première sorte les éléments peuvent être déplacés, nous pouvons les disposer dans un ordre que nous choisissons nous-mêmes, par exemple, lorsque ces éléments sont des lettres, dans l'ordre que leur assigne

l'alphabet d'où ils sont tirés. Les termes peuvent être ainsi ramenés tous à la *seconde sorte,* à celle où les éléments sont placés dans un ordre qui ne peut être changé.

**806.** Supposons que les termes à disposer en série linéaire ne contiennent pas tous le même nombre d'éléments, si l'on veut, le même nombre des lettres. On les distribuera en groupes d'après le nombre des lettres de chaque terme; puis on ordonnera ces groupes d'après le nombre croissant ou décroissant de ces lettres. On écrira ainsi

$$(abc + bcd + \ldots) + (ab + ac + \ldots) + (a + b + \ldots);$$

et l'on sera ramené, pour achever d'ordonner, à considérer les termes contenus dans chaque groupe, c'est-à-dire à considérer des termes possédant tous le *même nombre* de lettres.

**807.** Considérons ainsi le système complet des arrangements simples de $m$ objets $p$ à $p$. Ce système complet peut se partager en systèmes particuliers correspondant respectivement aux *combinaisons simples,* $p$ à $p$, des $m$ objets donnés, et le système particulier correspondant à chacune de ces combinaisons n'étant autre chose que le système des *permutations* des $p$ lettres de cette combinaison. On écrira successivement les différents systèmes particuliers en les ordonnant suivant les combinaisons qui leur correspondent; puis, dans chacun de ces systèmes, on ordonnera les permutations qui les constituent. On devra donc effectuer deux opérations successives : ordonner les *combinaisons simples* de $m$ lettres $p$ à $p$; ordonner les *permutations* de $p$ lettres. Chacune de ces opérations se rapporte évidemment à des termes qui contiennent tous le même nombre d'éléments.

**808.** Il existe un procédé, *artificiel* mais *très commode,* pour ordonner en série linéaire des termes quelconques, permutations ou arrangements, contenant tous le même nombre de lettres. Si ces lettres sont au nombre de $m$, on les remplace respectivement par 1, 2, 3, ..., $m$. Par cette substitution, chaque terme devient un nombre écrit dans le système dont la base est $m + 1$. Il ne reste plus qu'à placer tous ces nombres dans leur ordre de grandeur,

croissant ou décroissant. On aurait pu remplacer aussi les $m$ lettres par les $m$ nombres $0, 1, 2, \ldots, m-1$; mais cette introduction du zéro aurait empêché d'étendre le procédé au cas où les termes n'auraient pas tous contenu le même nombre de lettres. On aurait été conduit, par exemple, à confondre le terme composé de deux lettres et représenté par le nombre 37 avec le terme composé de 4 lettres et représenté par le nombre 0037.

**809.** M. Laisant a imaginé, pour les permutations de $n$ lettres, un mode très simple de représentation numérique. Dans une permutation quelconque, il remplace chaque lettre, sauf la dernière, par le nombre des inversions qu'elle forme avec les lettres placées à sa droite. Ce nombre étant considéré comme un caractère, comme un chiffre, chaque permutation se trouve représentée par un nombre de $n-1$ chiffres, écrit dans la *numération factorielle* (**12**). Il ne reste plus qu'à disposer, dans leur ordre croissant ou décroissant, les nombres correspondant au système des permutations données. Les 6 permutations des 3 lettres $a$, $b$, $c$ sont ainsi représentées, dans leur ordre, par les 6 expressions

$$00, \quad 01, \quad 10, \quad 11, \quad 20, \quad 21.$$

Ce mode de procéder permet d'ordonner en une suite linéaire les permutations des $n$ premiers nombres. Une permutation étant représentée par le signe qui, dans la numération factorielle, correspond au nombre $p$, le rang de cette permutation dans cette suite sera le nombre $p+1$. La permutation et son rang seront deux objets tellement liés, que, connaissant l'un quelconque des deux, il sera toujours très facile de déterminer l'autre. Cette façon si remarquable de représenter les permutations est, d'ailleurs, tirée de leur nature; déduite de la considération des inversions, elle repose sur la structure même des permutations.

# CHAPITRE IV.

## EXPRESSIONS ABRÉGÉES OU CONDENSÉES.

### Expressions abrégées.

810. Lorsqu'une expression nous présente un nombre *assez grand* d'éléments, nous ne pouvons pas, en général, les écrire *tous*. Nous n'en marquons que quelques-uns.

Nous représentons, par exemple, de la manière suivante,

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 100x^{99},$$

$$\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{100}\right),$$

une somme et un produit qu'il serait plus long, mais non pas plus clair, d'écrire *in extenso*. Cette façon de représenter ces expressions consiste, on le voit, à en écrire les premiers éléments, à remplacer les suivants par des points, et à marquer enfin le dernier, pour bien montrer où l'on s'arrête.

811. Très souvent, entre les éléments consécutifs écrits au commencement et l'élément unique écrit à la fin, on intercale l'élément de rang $i$, exprimé en fonction de $i$. La somme et le produit qu'on vient de voir s'écriraient alors

$$1 + 2x + \ldots + ix^{i-1} + \ldots + 100x^{99},$$

$$\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

Cet élément de rang $i$, exprimé en fonction de $i$, est ce qu'on appelle l'*élément général*. Lorsqu'il est marqué, le nombre des éléments écrits au commencement peut être diminué. Cependant,

lorsque sa forme est simple, qu'elle se devine facilement, il vaut mieux, comme nous l'avons fait d'abord, se dispenser de l'écrire. Peut-être même, pourrait-on dire qu'il vaut toujours mieux s'en dispenser. Il suffit, en général, d'écrire, au commencement de l'expression, des éléments assez nombreux pour que le lecteur puisse immédiatement, sans hésitation, induire, de l'examen de ces premiers éléments, la forme de tous les autres.

812. Lorsqu'on écrit l'élément général, l'expression nous présente deux suites de points, l'une entre le dernier des éléments initiaux et l'élément général, l'autre entre l'élément général et l'élément terminal unique. Lorsqu'on ne l'écrit pas, elle ne nous en présente qu'une. Dans l'un et l'autre cas, ces suites de points, placées à l'intérieur de l'expression, y jouent un rôle multiple : elles tiennent la place des éléments omis; elles unissent les différentes parties de l'expression; elles montrent parfaitement qu'on a affaire à une seule suite.

Il faut de plus que chaque série de points soit *précédée* et *suivie* d'un signe d'opération, le signe $+$ dans les sommes et, dans les produits, le point de la multiplication, lequel se confond d'ordinaire avec le premier ou le dernier des points de la série.

813. Cette façon d'écrire les expressions à *éléments nombreux* consiste, on le voit, à omettre le plus grand nombre de ces éléments et à les remplacer par des suites de points. Elle nous permet d'écrire les expressions où le nombre des éléments est fort grand, comme celles où ce nombre est indéterminé et représenté par $n$. Elle nous conduit à des notations abrégées, simples, claires, mais souvent inférieures, pour le calcul, aux notations que nous allons exposer sous le nom d'*expressions condensées*.

### Expressions condensées.

814. Lorsque les éléments qui composent une expression sont constitués d'une façon *très régulière*, on peut, quel que soit leur nombre, écrire cette expression sous forme *condensée*. C'est ce que l'on fait constamment pour les sommes contenant beaucoup de

termes et les produits contenant beaucoup de facteurs, quand on connaît la loi de formation de ces termes et de ces facteurs.

815. Prenons la somme

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},$$

où le terme qui occupe le $t^{\text{ième}}$ rang est l'inverse de $t^2$. Cette somme, sous *forme condensée,* se représentera par la notation

$$\sum_{t=1}^{t=n} \frac{1}{t^2},$$

laquelle signifie qu'il faut ajouter tous les résultats qu'on obtient en considérant l'expression $\frac{1}{t^2}$ qui suit le $\sum$, et en y remplaçant successivement la lettre $t$ par les nombres entiers consécutifs 1, 2, 3, ..., $n$, dont le premier est 1 et le dernier $n$.

Prenons de même le produit

$$\frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{3.4} \cdots \frac{1}{n(n+1)},$$

dont le facteur de rang $t$ est l'inverse de $t(t+1)$. Sous *forme condensée,* nous l'écrirons

$$\prod_{t=1}^{t=n} \frac{1}{t(t+1)},$$

et cette notation signifiera qu'il faut multiplier entre eux tous les résultats qu'on obtient en considérant l'expression $\frac{1}{t(t+1)}$, et en y remplaçant successivement $t$ par les nombres entiers consécutifs 1, 2, 3, ..., $n$, dont le premier est encore 1 et le dernier $n$.

816. On simplifie parfois les expressions condensées des sommes et des produits en écrivant, comme indice des signes $\Sigma$ et $\Pi$, la lettre $t$ qui prend des valeurs entières successives, et en plaçant, au-dessous et au-dessus d'eux, la première et la dernière de ces valeurs. On écrit ainsi

$$\sum_a^b {}_t f(t), \qquad \prod_a^b {}_t \varphi(t),$$

$a$ et $b$ étant les deux entiers qu'on appelle *les limites* du $\Sigma$ et du $\Pi$, et la lettre $t$ prenant successivement toutes les valeurs $a$, $a+1$, $a+2$, ..., $b$. Cette simplification, déjà ancienne, me paraît due à J. Bourget.

Parfois même, au lieu d'écrire cette lettre $t$ en indice, on la place à l'*intérieur* des majuscules $\Sigma$ et $\Pi$. Cette notation, qui n'est pas à imiter, rappelle la *numération grecque,* où l'on marquait le quintuple d'un nombre en insérant ce nombre dans la majuscule $\Pi$.

817. Dans certains cas, au lieu de remplacer $t$ par des nombres entiers consécutifs, on le remplace par des nombres définis d'une manière spéciale : par les multiples de 3; par les carrés parfaits; par les nombres premiers compris dans un certain intervalle; par les racines d'une équation donnée, etc., etc. On dit alors que le $\Sigma$ ou le $\Pi$ s'étend à tous ces nombres. C'est *dans le texte* qu'il faut indiquer ces nombres, qu'il les faut définir avec précision.

818. Il est à remarquer, d'ailleurs, qu'il est très mauvais de remplacer l'indice $t$ par un nombre *déterminé;* d'écrire, par exemple,

$$\sum_1^m a_1 \quad \text{pour} \quad \sum_1^m a_t.$$

On ne doit jamais oublier que $t$ n'est point déterminé; qu'il est toujours susceptible de recevoir des valeurs numériques différentes.

### Éléments en nombre illimité.

819. Les expressions dont nous venons de parler ne présentent chacune qu'un nombre fini d'éléments. Il en est où le nombre des éléments peut devenir supérieur à un entier donné quelconque, c'est-à-dire, pour employer le langage usuel des mathématiciens, peut devenir *infini.* Telle est la somme

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots$$

dont les termes sont en nombre illimité et qui se représente, sous

forme condensée, par l'expression

$$\sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{1}{2^i} \operatorname{tang} \frac{x}{2^i},$$

où l'indice $i$ prend toutes les valeurs entières positives 1, 2, 3, .... Tel est aussi le produit

$$\cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2^2} \cos\frac{x}{2^3} \cdots,$$

dont les facteurs sont en nombre illimité et qui se représente, sous forme condensée, par l'expression

$$\prod_{1}^{\infty}{}_i \cos\frac{x}{2^i},$$

l'indice $i$ prenant toujours toutes les valeurs entières.

820. Dans le produit

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\cdots,$$

les facteurs sont encore en nombre *illimité;* le facteur général est $1 - \frac{1}{p^2}$; la forme condensée est

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

et l'indice $p$ prend les valeurs de tous les nombres *premiers* autres que l'unité. C'est pour rappeler ce fait, qui doit être énoncé *dans le texte,* que l'on désigne l'indice par la lettre $p$.

821. Il arrive assez souvent que la somme ou le produit indiqué s'étend à l'*infini* dans les *deux sens,* c'est-à-dire que l'indice prend toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. C'est ce qui a lieu dans la somme représentée par l'expression condensée

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{\frac{2mi\pi z}{a}},$$

où l'indice est $m$ et où la lettre $i$ représente la racine carrée de $-1$.

822. Ainsi, toutes ces sommes et produits infinis se représentent, sous forme condensée, par les signes $\Sigma$ et $\Pi$, à la condition d'y indiquer l'une au moins des limites par le symbole $\infty$. Il va, d'ailleurs, sans dire, que toutes ces sommes et produits infinis, qu'on les donne sous forme condensée ou qu'on se borne à en marquer les premiers éléments, doivent être écrits avec le plus grand soin. Évidemment, dans le produit

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots,$$

il vaudrait mieux, pour la régularité, que le premier dénominateur nous présentât l'exposant 1. Quant à l'expression condensée

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

qui représente une série infinie, elle est mal écrite, puisque les *deux limites* en sont marquées de *façons disparates*.

823. Nous l'avons déjà vu, dans les expressions que nous écrivons en remplaçant les éléments omis par une suite de points, Laplace employait souvent, au lieu de ces points, l'abréviation etc ou &. Ce n'est point là une faute grave. — Pour représenter en abrégé une somme ou un produit infini, un auteur italien [1] en marque les premiers éléments; les fait suivre de points, et écrit, après ces points, cette indication *all' infinito*. Ce n'est pour nous qu'un pléonasme.

### Élément excepté.

824. Il arrive parfois que l'un des termes d'une somme ou l'un des facteurs d'un produit doit être *excepté* de l'expression condensée qui représente ce produit ou cette somme; que, dans

$$\sum_{0}^{\infty}{}_i\, u_i \quad \text{ou} \quad \prod_{0}^{\infty}{}_i\, v_i,$$

l'indice $i$ doive prendre toutes les valeurs entières excepté la valeur particulière $n$. Comment indiquer cette exception?

---

[1] R. Rubini, *Elementi di Algebra*, in-8°, Napoli, 1866, p. 472.

825. Un *premier* moyen consisterait à remplacer l'expression condensée par deux, l'une où l'indice $i$ prendrait toutes les valeurs de $0$ à $n-1$, l'autre où il prendrait toutes les valeurs de $n-1$ à $+\infty$. Par ce moyen, qui est excellent, la somme et le produit considérés deviendraient respectivement

$$\sum_{0}^{n-1}{}_i\, u_i - \sum_{n-1}^{-\infty}{}_i\, u_i,$$

$$\prod_{0}^{n-1}{}_i\, v_i \times \prod_{n-1}^{-\infty}{}_i\, v_i;$$

chaque expression serait en quelque sorte dédoublée.

826. Un *autre* moyen consisterait, sans toucher à l'expression condensée, à y supprimer par un calcul le terme ou le facteur qu'on devrait enlever et qu'on y laisse. Il suffirait de faire précéder la somme du terme $-u_n$, et de multiplier le produit par l'inverse du facteur $v_n$. Nos expressions prendraient ainsi les formes respectives

$$-u_n - \sum_{0}^{+\infty}{}_i\, u_i, \qquad \frac{1}{v_n}\prod_{0}^{-\infty}{}_i\, v_i,$$

qui sont très nettes. — Ces manières d'écrire semblent cependant inusitées. La cause en tient sans doute à ce que le facteur $v_n$ est fréquemment égal à zéro et qu'il nous répugne de multiplier une expression par l'inverse de zéro.

L'auteur d'une Algèbre excellente [1] désigne par $\sigma$, non pas le produit, ni la somme des nombres entiers $1, 2, \ldots, p$, mais simplement la suite de ces nombres. Il désigne par $\frac{\sigma}{\alpha}$ cette même suite après qu'il y a supprimé le nombre $\alpha$. Cette façon d'écrire est tout à fait analogue à celle que nous venons d'indiquer pour le produit condensé d'où l'on excepte un facteur.

827. Quoi qu'il en soit, les deux moyens que nous venons d'exposer répondent parfaitement au problème que nous nous étions posé : représenter par des notations nettes les sommes ou

---

[1] Ch. Briot, *Leçons d'Algèbre*, in-8°, Paris, 1879, 2e Partie, p. 70 *bis*.

produits d'où l'on excepte *un élément*. Il est, d'ailleurs, évident que ces mêmes moyens s'étendraient au cas où l'on en excepterait *deux* ou *plusieurs*.

828. Dans la pratique, on se contente le plus souvent d'affecter d'un accent le $\Sigma$ ou le $\Pi$ d'où l'on excepte soit un terme, soit un facteur. On écrit ainsi, dans la théorie des fonctions elliptiques, la somme et le produit condensés

$$\sum{}' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right), \qquad \prod{}' \left(1 + \frac{u}{m\pi}\right) e^{-\frac{u}{m\pi}},$$

le paramètre $m$ devant prendre, dans chacune de ces expressions, toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, à l'exception de la valeur zéro.

Il est à remarquer que ni l'une ni l'autre de ces dernières expressions n'indiquent explicitement les limites des valeurs de $m$, non plus que la valeur de $m$ qui doit être exceptée. Il est à remarquer aussi que cet emploi de l'accent pourrait, en certains cas, être incompatible avec d'autres emplois qu'on en ferait dans la même question. Ce serait au texte de combler ces lacunes et de prévenir toute erreur.

Peut-être, au lieu d'écrire

$$\sum{}' \quad \text{ou} \quad \prod{}',$$

vaudrait-il mieux écrire

$$^{\mu}\sum \quad \text{ou} \quad ^{\mu}\prod,$$

en marquant, à la gauche et en haut de la caractéristique, la valeur $\mu$ de l'indice qui doit être exceptée.

### Limites de certaines expressions.

829. Les séries et produits infinis, qu'ils s'étendent en un sens ou dans deux, qu'ils présentent un élément excepté ou n'en présentent aucun, sont souvent *convergents*, c'est-à-dire sont souvent tels que la somme ou le produit de leurs $n$ premiers éléments tende vers une *limite* lorsque l'entier $n$ croît indéfiniment. Nous pouvons

citer comme exemples le produit et la somme représentés par les expressions

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^3}\right)\left(1 + \frac{x}{2^4}\right)\cdots.$$

**830.** Dans chacun de ces exemples, la limite dépend de $x$, est une *fonction* de $x$. On peut la regarder comme en étant une *fonction explicite*. On dit souvent que cette fonction est la valeur même de cette somme ou de ce produit, pris entièrement. Cette façon de parler est vicieuse, puisque, dans la réalité, on n'a jamais une infinité de termes dans la première expression, ni une infinité de facteurs dans la seconde. La fonction, répétons-le, est la limite. Il nous faut la représenter, dans notre premier exemple, non point par la série infinie

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots.$$

mais par la notation

$$\lim\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)_\infty;$$

dans notre second exemple, non point par le produit infini

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^3}\right)\cdots,$$

mais par la notation

$$\lim\left[\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^3}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{2^n}\right)\right]_\infty.$$

**831.** C'est cependant l'*habitude* de représenter la limite par cette série infinie ou ce produit infini, surtout lorsqu'on les écrit respectivement sous les formes condensées

$$\sum_0^\infty{}_t \frac{x^t}{t!}, \qquad \prod_1^\infty{}_t \left(1 + \frac{x}{2^t}\right);$$

et cet usage, lorsque le lecteur en est prévenu, n'entraîne nul inconvénient.

### Cas de plusieurs indices.

832. Les suites et produits qui précèdent dépendent chacun d'*un seul indice*. On en rencontre souvent qui dépendent de *deux* ou *plusieurs*. On représente presque toujours ces derniers, sous forme condensée, par des expressions telles que

$$\sum a_{i,j}, \quad \prod a_{i,j},$$

dans lesquelles les indices $i$ et $j$ peuvent prendre chacun les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

Il importe de bien indiquer ces valeurs que peuvent prendre les indices. Quelquefois, on les marque dans une parenthèse, placée à la droite de l'expression condensée, en cette sorte :

$$\sum a_{i,j} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots, m \\ j = 1, 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Le plus souvent, on les indique dans le texte.

On ne doit jamais écrire

$$\prod \varphi(x_1, y_2) \quad \text{au lieu de} \quad \prod \varphi(x_i, y_j),$$

les indices ne pouvant, dans l'expression condensée, être représentés par des nombres *déterminés*.

833. Il est à remarquer, dans le cas de *plusieurs* indices, qu'on a souvent à tenir compte de *restrictions* essentielles.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les racines d'une équation de degré $m$. Considérons les différences qu'on obtient en prenant, de toutes les manières possibles, deux racines distinctes. Le produit de ces différences, soumis à cette restriction que les racines prises simultanément soient toujours distinctes, se représentera par la notation condensée

$$\prod_{i,j} (\alpha_i - \alpha_j) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, m \\ i \neq j \end{pmatrix},$$

où la parenthèse indique les valeurs que peuvent prendre $i$ et $j$, et

avertit que ces indices doivent toujours être inégaux. On ne pourrait se dispenser d'écrire cette parenthèse qu'à la condition de mentionner dans le texte, avec le plus grand soin, ces valeurs et cette restriction.

### Σ et Π superposés.

834. Dans le cas de plusieurs indices, la meilleure manière de former les expressions condensées, c'est d'y employer des *caractéristiques superposées;* d'écrire, par exemple,

$$\sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=m} a_{i,j}, \qquad \prod_{j=1}^{j=n} \prod_{i=1}^{i=m} b_{i,j},$$

en plaçant au-dessus et au-dessous de chaque Σ ou Π des égalités indiquant les limites des valeurs, ordinairement entières et consécutives, des différents indices. Les indices placés à droite et en bas empêcheraient de rapprocher les Σ successifs.

Je trouve, dans une publication contemporaine (¹), l'expression

$$\overline{\underline{\sum^{i} \sum^{k}}}^{\,3}_{1} \; a_{i,k} x_i x_k,$$

qui est très claire, mais où les indices ont le tort d'être placés à l'intérieur des Σ.

835. Considérons la somme

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=1}^{j=m} \sum_{i=1}^{i=l} A_{i,j,k}.$$

Pour la développer, on commencera par la droite; en d'autres termes, on ne fera varier d'abord que le seul indice $i$. On obtiendra ainsi une somme de $l$ termes, qu'il sera naturel de disposer en série linéaire, et où chaque terme contiendra encore deux indices littéraux. — On passera ensuite au Σ du milieu, c'est-à-dire qu'on

(¹) *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Band $III_2$, Heft 1, p. 88.

fera varier l'indice $j$ depuis 1 jusqu'à $m$. Cette opération nous donnera $m$ lignes, analogues à la précédente, et formant ensemble un rectangle comprenant $lm$ termes, qui ne contiendront plus chacun que le seul indice littéral $k$. — Faisant varier $k$ de 1 à $n$, c'est-à-dire effectuant l'opération indiquée par le $\Sigma$ de gauche, on obtiendra finalement $n$ rectangles, pareils au précédent et qu'on pourra supposer placés les uns sur les autres, de façon à constituer un parallélépipède rectangle de $lmn$ éléments. — Nous voyons ainsi que les expressions formées de $\Sigma$ superposés correspondent aux dispositions dans les différents espaces, dont nous avons précédemment parlé (692, 701).

836. Dans le calcul que nous venons d'effectuer, nous avons commencé par le $\Sigma$ de droite, et continué de proche en proche, en allant vers la gauche. C'est ainsi qu'on opère pour les intégrales définies multiples. Nous aurions pu, sur l'exemple actuel, suivre un *ordre quelconque,* parce que les *limites* des différents $\Sigma$ y sont *indépendantes* les unes des autres. Dans les exemples tels que celui-ci,

$$\sum_{i=1}^{i=n-3} \sum_{j=i}^{j=n-2} \sum_{k=j}^{k=n-1} \sum_{l=k}^{l=n} U_{i,j,k,l},$$

où $n$ est un nombre donné et où $i$, $j$, $k$, $l$ sont les indices variables, nous devrons *forcément* commencer *par la droite,* puisque les *limites inférieures* des $\Sigma$ *dépendent* les unes des autres.

837. Tout ce que nous venons de dire sur les $\Sigma$ superposés peut s'étendre aux $\Pi$ superposés, et même aux expressions qui nous offrent à la fois des $\Sigma$ et des $\Pi$. Pour les lettres $\Pi$, on peut toutefois se dispenser de marquer les limites à l'aide d'égalités ; on peut très bien marquer, à droite et en bas, l'indice correspondant à chacun d'eux, écrire par exemple

$$\prod_{1}^{n}{}_{j} \prod_{1}^{m}{}_{i} A_{i,j},$$

sans que les lettres $\Pi$ aient besoin d'être éloignées l'une de l'autre.

838. Quoi qu'il en soit, dans ces expressions condensées, il peut

arriver qu'un ou plusieurs des indices variables *croisse indéfiniment*. On marquera ce fait en se servant du symbole $\infty$.

Il se peut, lorsqu'il en est ainsi, que l'expression tout entière soit *convergente*, c'est-à-dire tende vers une *limite*. On fera cette convention de représenter cette limite par l'expression condensée elle-même.

# CHAPITRE V.

## NOTATIONS PARTICULIÈRES.

### Représentation des déterminants.

839. Les déterminants ne sont au fond que des suites de termes, les uns positifs, les autres négatifs, qui tirent leur origine de la considération des systèmes d'équations linéaires. Leur *importance* les a fait étudier à part; leur *longueur* a forcé de les écrire d'une manière abrégée.

La manière abrégée employée le plus souvent consiste à les mettre sous forme de *tableaux carrés*. Elle a été suggérée, sans doute, par la disposition où se trouvent, dans les systèmes d'*équations linéaires* bien écrits, les coefficients des inconnues, c'est-à-dire les éléments mêmes du déterminant. Pour se faire une idée de l'abréviation résultant de cette notation, il suffit de remarquer que le carré formé de 7 lignes et 7 colonnes remplace un polynome contenant 5040 termes.

840. Ce Tableau carré peut être regardé comme une Table à double entrée. Chaque élément s'y trouve au point d'intersection d'une *ligne* et d'une *colonne*, qu'on rappelle le plus souvent, comme le faisait Leibniz, à l'aide de *deux indices*. On écrit ainsi le déterminant de 9 éléments sous l'une de ces deux formes,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

en plaçant les indices l'un en haut et l'autre en bas, ou bien tous les deux en bas, sans même, lorsqu'ils sont petits, les séparer l'un de l'autre par une virgule. La seconde de ces notations est présen-

tement la notation usuelle; la première, que certains estiment la meilleure, est celle dont se sont servis Jacobi et, après lui, Otto Hesse [1].

841. Parfois, pour supprimer un indice, on emploie des lettres différentes affectées d'accents. Le déterminant ci-dessus s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix}$$

Mais, d'après ce que nous avons dit sur les lettres accentuées ou non accentuées, il serait mauvais, bien qu'on le fasse très souvent, de l'écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Cet emploi d'accents et de lettres différentes a parfois cet avantage de permettre d'utiliser des indices dotés de significations nouvelles. Supposons que, dans un déterminant de 9 éléments, les éléments de la première colonne soient tous des binomes. Ce déterminant pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b' & c' \\ a_1'' - a_2'' & b'' & c'' \\ a_1''' - a_2''' & b''' & c''' \end{vmatrix}.$$

842. D'ailleurs, que l'on fasse usage de deux indices, ou bien de lettres différentes et d'accents, la représentation d'un déterminant par le *carré* de ses éléments est une notation *très bonne*. Elle exprime très bien la signification de chaque élément, et la correspondance des éléments deux à deux. Le seul reproche qu'on puisse lui adresser, c'est de porter le lecteur à croire que le déterminant est une fonction symétrique soit de ses lignes, soit de ses colonnes; erreur grave : puisque le déterminant change de signe lorsqu'on y intervertit deux rangées parallèles quelconques; puisqu'il est, non point une *fonction symétrique*, mais, comme on dit, une *fonction alternée*.

---

[1] Né en 1811, mort en 1874.

843. Si abrégée que soit cette notation usuelle des déterminants, on est parfois obligé de l'abréger encore. C'est ce qui arrive pour les déterminants formés d'un nombre d'éléments *trop grand,* indéterminé ou infini. On en écrit les premières lignes, les premières colonnes, quand on le peut les dernières, et l'on remplace par des suites de points les lignes ou colonnes qui manquent. On écrit, par exemple, le déterminant général de $n$ lignes et $n$ colonnes sous la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Parfois même, on n'écrit que la première ligne du déterminant, représentant ainsi par

$$|c_{11} - S \quad c_{12} \quad c_{13} \quad \dots \quad c_{1n}|$$

le déterminant constituant le premier membre de l'équation en S du degré $n$. Parfois même, on n'en indique que le terme général : c'est ce que faisaient Cauchy et Jacobi lorsqu'ils représentaient les *fonctions alternées* par l'expression

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Ces différentes notations abrégées dérivent toutes du Tableau carré. Il en est de même des notations

$$\frac{1}{1}\left|\frac{2}{2}\right|\frac{\dots}{\dots}\left|\frac{n}{n}\right., \qquad \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix},$$

qui représentent chacune le déterminant général de $n^2$ éléments.

844. Un auteur italien désigne par $(r, s)$ le déterminant $a_r b_s - a_s b_r$. Grassmann désigne par

$$\left[v \frac{dx}{du} \frac{dx}{dv}\right]$$

le déterminant formé par les composantes rectangulaires des trois vecteurs

$$v, \quad \frac{dx}{du} du, \quad \frac{dx}{dv} dv.$$

Évidemment, puisque le Tableau carré représentant un déterminant n'est qu'une *table à double entrée,* ce déterminant peut s'indiquer par une expression formée de *deux* $\Sigma$ *superposés* portant sur l'*élément général,* c'est-à-dire sur une variante à deux indices. Il suffirait en réalité de faire connaître cette variante et de marquer le nombre $n$ des lignes et des colonnes. On pourrait représenter le déterminant de $n^2$ éléments par l'une de ces notations

$$|A_{r,s}|_n, \qquad (r, s)_n,$$

$A_{r,s}$ ou $(r, s)$ n'étant que l'élément général, donné sous forme explicite.

### Factorielles.

845. Le produit des $n$ premiers nombres entiers se nomme *factorielle* $n$ et se représente, en France, par $n!$ Cette notation singulière n'a nul inconvénient. Il faut, en l'écrivant, avoir grand soin de mettre le point d'exclamation fort près de la lettre $n$. Si, à la place de cette lettre unique $n$, on avait un binome ou *a fortiori* un polynome, il le faudrait mettre entre parenthèses. La factorielle $n-k$ devrait s'écrire, non pas $n-k!$ comme on le fait en certain Livre, mais bien $(n-k)!$ Si la factorielle était élevée à une puissance, il faudrait la placer tout entière entre parenthèses ou entre crochets : le carré de $n!$ s'écrirait $(n!)^2$.

846. Comme nous l'avons déjà dit, la factorielle ne s'indique pas toujours comme nous venons de le faire. On représente présentement en Angleterre $n!$ par $\underline{|n}$. On sait, d'ailleurs, que, si $\mu$ est entier et positif, la fonction désignée par $\Gamma(\mu+1)$ se réduit à $\mu!$

847. On représente soit par $[x, h]^n$, soit par $x^{n/h}$ le produit de $n$ facteurs en progression arithmétique de raison $h$, dont le premier est $x$. Les produits de cette sorte, que Kramp avait appelés *facultés numériques,* se nomment aussi *factorielles,* et il est bien évident que la factorielle qui précède, la factorielle proprement dite, n'en est qu'un cas particulier. Le symbole qui les représente demande à être, chaque fois qu'on l'emploie, bien défini, bien écrit.

Cette nouvelle factorielle, d'ailleurs, pas plus que la factorielle

proprement dite, n'exigeait une notation spéciale. On aurait pu évidemment représenter l'une et l'autre à l'aide de la notation condensée des produits.

### Fractions continues.

848. Toute *fraction continue,* écrite *in extenso,* nous présente plusieurs barres horizontales superposées. C'est la première qui est la *barre maîtresse,* la barre qu'on doit placer sur la ligne principale de l'écriture. On agira ainsi : pour la fraction continue

$$y' + \cfrac{1}{y'' + \cfrac{1}{y''' + \cfrac{1}{y''''}}},$$

qui nous présente trois barres; — pour la fraction

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

qui nous en présente $n$; — et pour la fraction

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}},$$

qui nous en offre un nombre illimité. — Dans chacune de ces deux dernières fractions continues, nous avons dû employer une suite de points. Comme nous l'avons déjà dit, cette suite doit toujours être précédée et, quand elle est limitée, suivie de l'un des signes + ou —.

849. Il est bien évident que les fractions continues, dont les numérateurs ne sont pas tous égaux à l'unité, nous présentent *deux suites* de nombres : la suite des *quotients incomplets* et la suite des *numérateurs.* Ces deux suites se distinguent nettement sur cet exemple,

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3}}},$$

dont la notation est très bonne. Elles ne se distingueraient point sur celui-ci,

$$a - \cfrac{b}{c - \cfrac{d}{e - \cfrac{f}{g}}},$$

dont la notation est franchement mauvaise.

850. La notation des fractions continues que nous venons d'exposer est la notation exacte et naturelle. Elle a cet inconvénient d'occuper verticalement une trop grande place. Quelques auteurs, pour y remédier, écrivent l'avant-dernière, par exemple, des fractions continues qui précèdent, sur une seule ligne horizontale en cette sorte :

$$a_0 + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 + b_3 : a_3.$$

Cette notation n'est que la reproduction fidèle, en signes mathématiques, des mots que l'on prononce lorsqu'on lit à haute voix la fraction continue considérée. Elle n'en est pas meilleure. D'abord, l'absence des signes de groupement la rend analogue aux expressions que nous avons signalées plus haut (761) comme expressions ambiguës. Ensuite, elle nous présente ce fait curieux, qu'elle n'indique nullement, à savoir : que chaque signe d'opération ne porte que sur la seule lettre qui le précède immédiatement, tandis qu'il s'étend à l'ensemble de tout ce qui le suit.

851. Le meilleur moyen de représenter, sur une seule ligne, une fraction continue dont tous les numérateurs sont égaux à l'unité, serait peut-être d'écrire simplement, comme on le fait parfois, la suite

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

de ses quotients incomplets; le meilleur moyen de représenter une fraction continue quelconque, d'écrire l'ensemble

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots]$$

de ses quotients incomplets et de ses numérateurs. Bien entendu faudrait-il, une fois pour toutes, prévenir le lecteur du sens de ces notations.

### Formes algébriques.

852. Une *forme* n'est autre chose qu'un polynome entier, *homogène* et de degré quelconque, à deux ou plusieurs variables. La forme est linéaire, quadratique, cubique, ..., selon que son degré est 1, 2, 3, .... Elle est binaire, ternaire, quaternaire, ..., selon qu'elle nous présente 2, 3, 4, ... variables. Nous avons vu (797) dans quel ordre ses différents termes devaient se succéder. Il est évident que le nombre total des termes d'une forme complète de degré $n$, à $p$ variables, est égal au nombre des combinaisons complètes de $n$ objets $p$ à $p$. Ce nombre est donc fort grand dès que $n$ et $p$ ne sont pas l'un et l'autre très petits. Comment représenter cette forme complète d'une façon abrégée?

853. Une forme binaire de degré $n$ se représente par la notation

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n,$$

où les variables sont $x$ et $y$, et où le coefficient du terme en $x^{n-p}y^p$ n'est autre chose que le produit de la lettre $a_p$ par le coefficient numérique du terme correspondant de $(x+y)^n$.

Une forme ternaire de degré $n$ se représenterait par

$$(a, b, c, \ldots)(x, y, z)^n,$$

les variables étant $x$, $y$, $z$ et le coefficient de l'un quelconque des termes se composant d'une des lettres $a$, $b$, $c$, ... multipliée par celui des coefficients de $(x+y+z)^n$ qui correspond à ce terme.

Et ainsi de suite.

854. Nous avons dit que l'emploi des coefficients numériques de la $n^{\text{ième}}$ puissance soit de $x+y$, soit de $x+y+z$, ... était toujours avantageux. On peut cependant se dispenser d'en faire précéder les coefficients littéraux. Lorsqu'on opère ainsi, on en avertit le lecteur en faisant empiéter les deux parenthèses l'une sur l'autre, en écrivant, par exemple, de cette façon,

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)(x, y)^n,$$
$$(a, b, c, \ldots)(x, y, z)^n,$$

les deux formes que nous avons considérées plus haut.

855. On se sert parfois d'expressions abrégées beaucoup plus simples. Un auteur représente par F $(x, \xi)$ une forme d'ordres $r$, $\sigma$ pour les séries distinctes de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Un autre représente par

$$[x_1, x_2, \ldots, x_p]^{m)}$$

la fonction *aleph* de Wronski, c'est-à-dire la forme complète, de degré $m$, des $p$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, où tous les coefficients sont égaux à l'unité.

### Substitutions.

856. Effectuer une *substitution* dans une expression quelconque contenant plusieurs variables, c'est y remplacer respectivement ces variables par des fonctions déterminées de variables nouvelles. Le moyen le plus simple de définir une substitution, c'est évidemment de faire connaître, pour chacune des variables anciennes, la fonction des variables nouvelles qui la doit remplacer.

857. On définit ainsi, par les égalités

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y', \\ y &= \gamma x' + \delta y', \end{aligned}$$

la substitution linéaire qui remplace les variables $x$, $y$ par les variables $x'$, $y'$. Plus généralement, on définit par les égalités

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \ldots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ x_2 &= \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \ldots + \gamma_{2n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_{n1}\xi_1 + \gamma_{n2}\xi_2 + \ldots + \gamma_{nn}\xi_n \end{aligned}$$

la substitution, linéaire encore, qui remplace les variables $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ par les variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Ces notations sont excellentes, mais occupent trop de place. C'est l'usage, pour abréger, de représenter respectivement les deux substitutions précédentes par les Tableaux

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ces notations abrégées sont analogues à celles des déterminants : elles ont au fond la même origine.

858. Il arrive très souvent que les nouvelles variables ou lettres ne diffèrent point des anciennes, et que la substitution a pour effet unique de *permuter* ces lettres entre elles. Supposons que les lettres données soient $a, b, c, d, e, f$. Pour définir la substitution, on écrira, au-dessus de chacune de ces lettres, celle par laquelle on la doit remplacer. On arrivera ainsi à cette expression

$$\begin{pmatrix} e & f & d & b & a & c \\ a & c & d & e & b & f \end{pmatrix},$$

que l'on écrit souvent

$$\left(\frac{P_i}{P_0}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\Sigma_i}{\Sigma_0}\right),$$

les lettres $P_0$, $P_i$ ou $\Sigma_0$, $\Sigma_i$ représentant respectivement les deux permutations considérées.

Cette forme de rapport qu'on donne à l'ensemble des deux permutations rappelle, d'ailleurs, que la substitution peut être *réduite :* si deux lettres correspondantes y sont identiques, on peut, en effet, les supprimer toutes deux.

Cette notation elle-même peut être encore abrégée. Lorsque l'on convient de prendre toujours, pour la permutation d'en bas, celle dont les lettres se succèdent dans l'ordre alphabétique, il suffit évidemment d'écrire la permutation d'en haut. La substitution précédente pourrait s'écrire simplement $(efdbac)$. Mais, d'ordinaire, on réserve cette notation, qui n'emploie qu'une permutation, à l'écriture des *substitutions circulaires* ou *cycles*.

859. *Permuter circulairement* les lettres d'une permutation, c'est remplacer chacune d'elles par la suivante, et la dernière par la première. Permuter circulairement les lettres de la permutation $bdfeac$, c'est donc effectuer la substitution

$$\begin{pmatrix} d & f & e & a & c & b \\ b & d & f & e & a & c \end{pmatrix}.$$

Comme nous venons de le dire, on indique simplement par

$$(b\ d\ f\ e\ a\ c)$$

cette permutation circulaire ou *cycle*.

Une substitution consistant à permuter des lettres données peut toujours se décomposer en *cycles*. On la représente le plus souvent en juxtaposant ces cycles, de cette manière :

$$(adf)(bc)(e).$$

Il est, d'ailleurs, évident qu'un cycle composé d'une lettre unique exprime simplement que, par la substitution considérée, cette lettre ne change point.

860. On sait que les substitutions jouent, dans toutes les parties des Mathématiques, un rôle considérable. En Géométrie analytique, c'est par elles que s'effectuent les plus grandes simplifications. En Algèbre, c'est par elles que Galois [1] a transformé la théorie des équations.

### Différences.

861. La théorie des *différences* donne le moyen de représenter, d'une façon abrégée, la *somme* de certaines suites. Considérons, en effet, pour employer les notations consacrées, les $n+1$ quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n.$$

En retranchant chacune d'elles de la suivante, on obtient les $n$ différences premières

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \ldots\ \Delta u_{n-1}.$$

En opérant de même sur ces nouvelles quantités, on obtient les $n-1$ différences secondes

$$\Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ \ldots\ \Delta^2 u_{n-2}.$$

Et ainsi de suite. — Finalement, on arrive à une différence $n^{\text{ième}}$ unique qui est

$$\Delta^n u_0.$$

Or, comme on le démontre facilement, si l'on représente par $C_n^p$

---

[1] Né en 1811, mort en 1832.

le nombre des combinaisons simples de $n$ objets $p$ à $p$,

$$\Delta^n u_0 = u_n - C_n^1 u_{n-1} + C_n^2 u_{n-2} - \ldots \pm C_n^n u_0.$$

C'est cette formule qui conduit à une notation abrégée.

**862.** Supposons, en effet, que l'on ait à représenter une suite analogue au second membre de cette égalité, c'est-à-dire une suite dont le terme général soit

$$(-1)^p C_n^p f(n-p),$$

l'indice $p$ prenant toutes les valeurs entières $0, 1, 2, \ldots, n$. Notre quantité $f(n-p)$ ne sera autre chose que $u_{n-p}$. Par conséquent, la somme de la suite tout entière ne sera autre chose que $\Delta^n f(0)$.

**863.** C'est là une notation abrégée que l'on emploie souvent; mais qui n'est claire que pour les lecteurs familiers avec la théorie des différences. On fera bien de lui préférer une de ces notations condensées que nous avons vues précédemment (814), qui sont il est vrai un peu moins brèves, mais qui présentent toujours beaucoup de précision et de clarté.

### Notations symboliques.

**864.** Les expressions *symboliques* doivent leur origine à des ressemblances qu'on aura constatées entre certains développements et d'autres développements antérieurement connus. La théorie classique des différences, que nous venons de rappeler, nous présente les deux formules

$$u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + C_n^2 \Delta^2 u_0 + \ldots + C_n^n \Delta^n u_0,$$
$$\Delta^n u_0 = u_n - C_n^1 u_{n-1} + C_n^2 u_{n-2} - \ldots \pm C_n^n u_0,$$

où le symbole $C_n^p$ désigne le nombre des combinaisons simples de $n$ objets $p$ à $p$. Or si, dans la première, on met $u_0$ en facteur commun et si, dans la seconde, on regarde les indices de $u$ comme des exposants, on est conduit à écrire respectivement ces deux égalités sous les formes

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0, \qquad \Delta^n u_0 = (u - 1)^n,$$

qui sont des formes purement symboliques.

865. Le même fait se présente lorsqu'on calcule les *différentielles totales* d'une fonction de plusieurs variables. Dans le cas le plus simple, celui de deux variables seulement, les différentielles totales successives sont

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy,$$
$$f''_{x^2}\,dx^2 + 2f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{y^2}\,dy^2,$$
$$f'''_{x^3}\,dx^3 + 3f'''_{x^2y}\,dx^2\,dy + 3f'''_{xy^2}\,dx\,dy^2 + f'''_{y^3}\,dy^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

et ces expressions nous rappellent immédiatement les puissances du binome $f'_x\,dx + f'_y\,dy$, de façon que nous sommes conduits à écrire la différentielle totale d'ordre $n$ sous la forme *symbolique*

$$(f'_x\,dx + f'_y\,dy)^n.$$

La puissance *symbolique*

$$(f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz)^n$$

nous représenterait de même la différentielle totale, d'ordre $n$, de la fonction $f(x, y, z)$.

866. Comme nous l'avons déjà dit (759), pour distinguer ces puissances symboliques des puissances proprement dites, on peut enfermer l'expression, élevée à la puissance symbolique, dans une parenthèse double; ou bien mettre l'exposant dans une parenthèse simple; ou bien encore placer cet exposant à la droite et en bas.

Quoi qu'il en soit, ces puissances symboliques sont d'un continuel usage. C'est grâce à elles qu'on peut écrire d'une manière simple : en Analyse, dans le cas de plusieurs variables, la formule de Taylor et celle de Maclaurin [1]; — en Géométrie analytique plane, les polaires successives d'un point par rapport à une courbe; — en Géométrie analytique à trois dimensions, le cône des tangentes à une surface, en un point multiple d'ordre quelconque.

867. Il existe, d'ailleurs, une foule d'expressions symboliques qui ne sont point des puissances; qui varient d'un cas à un autre; et qu'il faut, dans chaque cas, définir avec soin, puisque les signes qu'on y emploie n'y possèdent plus leurs significations ordinaires. La nouvelle Algèbre en fait l'emploi le plus large, notamment dans

---

[1] Taylor, 1685-1731; Maclaurin, 1698-1746.

la théorie si importante des *invariants* et *covariants*. Ce qui justifie cet usage, ce qui le rend très avantageux, c'est que les notations symboliques sont toujours des notations abrégées, et qu'elles possèdent toujours une grande vertu mnémonique.

### Opérateurs.

868. Nous avons parlé déjà (161) de l'extension, peut-être exagérée, que l'on a donnée à la notion de multiplication et, par suite, à celle de puissance. Calculer $fx$, c'est effectuer sur $x$ un certain ensemble de calculs : on a dit que c'était *multiplier* $x$ par la *caractéristique* $f$, et l'on a appelé cette caractéristique, sinon un multiplicateur, du moins un *opérateur*.

Il existe des opérateurs de bien des sortes. Si S désigne une substitution des quatre lettres $a$, $b$, $c$, $d$, et F, une fonction de ces mêmes lettres, dans l'expression SF, qui a la forme d'un produit, S est un opérateur. — Dans l'égalité

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)f,$$

qui définit la différentielle totale d'une fonction de trois variables, la parenthèse est un opérateur. — L'expression définie par l'égalité

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial y_1}$$

est un *opérateur différentiel*. — Les expressions dites *crochets* de Poisson [1] sont des opérateurs. — L'expression

$$A_0\frac{\partial}{\partial B_0} + A_1\frac{\partial}{\partial B_1} + A_2\frac{\partial}{\partial B_2} + \ldots + A_n\frac{\partial}{\partial B_n}$$

est encore un *opérateur*, relatif aux deux formes binaires

$$(A_0, A_1, \ldots, A_n)(x_1, x_2)^n, \qquad (B_0, B_1, \ldots, B_n)(x_1, x_2)^n.$$

Lorsqu'une figure F′ se déduit d'une figure F par une transformation T, on dit parfois que F′ est la transformée de F par T et l'on écrit

$$F' = TF.$$

---

[1] Né en 1781, mort en 1840.

Il est évident alors que T est, en quelque sorte, un *opérateur géométrique*.

869. Si l'on effectue une première opération sur une variable ou une fonction; puis une deuxième opération sur le résultat de cette première; puis une troisième opération sur ce nouveau résultat; l'opérateur unique qui donnerait ce résultat final serait le *produit* des trois opérateurs, pris dans leur ordre, qui correspondraient aux trois premières opérations. Ainsi les opérateurs se multiplient entre eux. Seulement c'est là une multiplication d'un genre particulier, et dont le produit n'est point indépendant de l'ordre des facteurs. Deux substitutions étant représentées respectivement par S et T, les produits ST et TS sont, en général, différents.

Lorsque tous les opérateurs sont égaux, ce produit devient une *puissance* et se représente à l'aide de la notation des exposants. Supposons qu'une opération soit indiquée par $f$ : la même opération répétée deux fois, trois fois, ... sera indiquée par $f^2$, $f^3$, .... Les opérateurs seront des puissances. Certains auteurs, à la vérité, au lieu d'exposants emploient des indices : ils désignent par $\Delta_n V$ le résultat de l'opération $\Delta$ appliquée $n$ fois à la fonction V; c'est la notation des différences. — Édouard Lucas [1] a désigné [2] par $\Sigma^1$, $\Sigma^2$, $\Sigma^3$, ... les résultats de l'opération $\Sigma$ appliquée une fois, deux fois, trois fois, ... : c'est une notation relative aux *sommes* qui seraient les analogues des différences.

870. Cet emploi singulier de la notation des puissances permettrait d'écrire, d'une manière simple, la *fonction inverse* d'une fonction donnée. Dans cette notation, l'inverse du nombre $a$ se représenterait par $a^{-1}$; l'inverse de la fonction $fx$ se représenterait par $f^{-1}x$. Les géomètres anglais écrivent $\sin^{-1}x$ pour arc $\sin x$. Cette notation n'a jamais été usitée en France; mais ce qui précède suffit à la justifier. — Il est évident, d'ailleurs, que si l'on désigne une substitution par S, et son inverse par $S^{-1}$, on a identiquement, comme dans le cas des vraies puissances,

$$SS^{-1} = S^{-1}S = 1.$$

---

(1) Né en 1842, mort en 1891.

(2) *Théorie des Nombres*, in-8°, Paris, 1891, p. 8.

871. L'usage des notations *symboliques* conduit constamment à la considération d'opérateurs plus ou moins compliqués. Dans les formules symboliques

$$u^n = (1 + \Delta)^{(n)} u_0, \qquad \Delta^n u_0 = (u - 1)^n,$$

qui appartiennent l'une et l'autre à la théorie classique des différences, chaque parenthèse, munie de son exposant, est un *opérateur*.

Réciproquement, les *opérateurs* se désignent souvent par des notations *symboliques*. Dans la nouvelle Algèbre, où l'on calcule sur les symboles d'opérations comme on calcule d'ordinaire sur les lettres, on représente souvent l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1},$$

qui joue le plus grand rôle dans la théorie des invariants et covariants, par la notation symbolique $\overline{12}$, qui a le mérite d'être d'une grande brièveté. Les opérateurs, comme les expressions symboliques, sont, d'ailleurs, toujours des notations abrégées.

# CHAPITRE VI.

## RELATIONS.

### Généralités sur les relations.

872. Une égalité, une inégalité, une *relation* quelconque n'est autre chose qu'un ensemble de *deux expressions* réunies par un de ces signes spéciaux, positifs ou négatifs, simples ou doubles, que nous avons précisément nommés (246) signes de *relation*. Celle des deux expressions qui est placée à la gauche de ce signe est le *premier membre* de la relation; celle qui est placée à la droite en est le *second*.

873. Les deux membres et le signe qui les unit doivent toujours être bien écrits, bien calibrés, surtout bien alignés. Il faut que le signe de relation soit assez grand dans le sens horizontal, et que les deux membres ne soient point trop serrés contre lui. C'est seulement à ces conditions que les trois parties dont la relation se compose sont bien nettes, bien distinctes.

Quant à la relation tout entière, sauf dans le cas de force majeure, elle ne doit pas être écrite à l'intérieur du texte. Elle doit être isolée, sur une ligne qui lui soit propre, et placée au milieu de cette ligne ou, comme disent les imprimeurs, au centre de la *justification*.

874. Bien entendu, en écrivant une relation, on ne doit en omettre aucun élément essentiel, y introduire aucun élément superflu.

Je trouve, en un très bon Livre,

$$(x - \alpha)^2 \text{ est } > 0.$$

Ce mot *est* me paraît inutile et il a le tort de mêler le langage ordinaire à l'algorithme de l'Algèbre.

Combien de fois ne m'est-il pas arrivé de rencontrer des élèves qui oubliaient le signe = d'une équation et, par exemple, disaient ou écrivaient : *Considérons l'ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. On pourrait citer des Livres où cette même faute est imprimée.

875. Cet oubli provient peut-être de l'usage, très justifié nous le verrons, d'écrire fréquemment les équations en réduisant leur second membre à zéro.

Ce même usage explique peut-être encore cette nouvelle faute, dont on trouve aussi des exemples imprimés, et qui consiste à dire, si $a$ est une racine de l'équation

$$f(x) = 0,$$

que *a annule* cette équation. Ce qu'il faut dire, c'est que *a vérifie* cette équation, ou en annule le premier membre. Est-il nécessaire d'expliquer qu'une équation ne peut jamais être nulle, ne peut jamais prendre une valeur quelconque! Qu'une équation, qu'une relation n'est ni un nombre, ni une grandeur, ni une quantité!

### Réduction du second membre à zéro.

876. En toute relation, on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre. En toute égalité et même, sous certaines conditions, en toute inégalité, on peut multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre. Il suit de là que toute relation peut s'écrire d'une infinité de manières; que l'équation donnée, $A = B$, par exemple, peut s'écrire $A' = B'$, $A'' = B''$, ....

La relation n'est donc point caractérisée par la forme qu'elle affecte. Si l'on veut pouvoir comparer les relations entre elles, pouvoir les étudier par des procédés uniformes, et même pouvoir simplement les reconnaître, il convient donc de faire un choix parmi les différentes manières de les écrire. On a choisi celle où tous les termes sont placés au premier membre [1] et où, par conséquent, le *second* est réduit *à zéro*. Une équation donnée $A = 0$

---

[1] Cette façon d'écrire paraît due à Harriot. — V. Bossut, *Histoire des Mathématiques*, in 8°, Paris, 1810, t. I, p. 286.

ne peut plus s'écrire que sous les formes $A' = 0$, $A'' = 0$, ... dont les premiers membres ne diffèrent de A que par un facteur. La relation est complètement caractérisée par la fonction qui en constitue le premier membre.

877. On appelle équations *algébriques* les équations, à une ou plusieurs inconnues, qui peuvent se ramener à la forme

$$f(x, y, z, \ldots) = 0,$$

dont le premier membre est un polynome entier. Pour étudier ces équations, on les prend toujours sous cette forme, où leur second membre est nul. C'est ce que l'on fait, en particulier, dans la théorie des équations algébriques à une seule inconnue. On convient, en outre, assez souvent, d'ordonner ce polynome par rapport aux puissances décroissantes de l'inconnue, et même d'en réduire le premier coefficient à l'unité. Par ces conventions, l'équation algébrique

$$f(x) = 0$$

ne peut plus s'écrire que d'une seule façon.

On met presque toujours sous cette forme, où *le second membre est nul,* les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différences finies et les équations aux différences mêlées.

878. En Géométrie analytique, lorsqu'il s'agit de discuter et de classer les lignes planes ou les surfaces de degré $m$, on part, en général, de l'une ou l'autre des équations

$$f(x, y) = 0, \qquad f(x, y, z) = 0,$$

dont le premier membre est le polynome complet du degré $m$, à deux ou trois variables, et dont le second membre est toujours zéro. On écrit aussi, avec des seconds membres nuls, les équations, déduites de cette discussion, qui représentent les différents types trouvés de lignes et de surfaces. C'est ce que l'on fait notamment, dans le cas particulier du second degré, pour la classification des coniques et pour celle des quadriques.

Quel que soit, d'ailleurs, le degré des lignes et surfaces repré-

sentées par les équations

$$f(x, y) = 0, \qquad f(x, y, z) = 0,$$

c'est en partant de ces équations, dont le second membre est nul, que l'on obtient, pour ces lignes et surfaces, les *équations canoniques* des tangentes, normales, plans tangents, etc., etc.

### Écriture du premier membre.

879. Considérons une équation ou relation quelconque, à second membre nul. Il faudra, pour qu'elle soit bien écrite, que les termes composant son premier membre soient bien *groupés* et *ordonnés*. Nous avons expliqué la manière de grouper et d'ordonner convenablement (786, 797). Nous nous bornerons ici à rappeler les conseils donnés plus haut.

880. Tout d'abord, une équation algébrique à une inconnue ne doit contenir qu'*un seul terme constant*. Si ce terme n'était pas un monome, il faudrait donc le placer entre parenthèses. L'équation du second degré

$$x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 - 4m + 1 = 0$$

est une équation mal écrite.

Si le premier membre se compose de termes de degrés différents, on l'ordonnera suivant les degrés décroissants et, dans chaque degré, on réunira les termes du même type. C'est ainsi qu'est écrit le premier membre de l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2) + (yz + zx + xy) - (x + y + z) = 0,$$

qu'on peut citer comme modèle.

881. Dans le cas où le premier membre est une *forme* d'un nombre quelconque de variables, on constitue autant de groupes que les termes nous offrent de *types* différents. Si la forme est binaire, on peut se dispenser de grouper et se contenter d'ordonner par rapport aux puissances de l'une des deux variables. Au lieu d'écrire

$$(x^3 + y^3) + 3(x^2y + xy^2) = 0,$$

on peut écrire simplement

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 0.$$

On écrit ainsi, presque toujours,

$$A\,d\alpha^2 - 2C\,d\alpha\,d\beta + B\,d\beta^2 = 0,$$

et non pas

$$(A\,d\alpha^2 + B\,d\beta^2) - 2C\,d\alpha\,d\beta = 0.$$

D'ailleurs, les termes de même type qui constitueront un groupe se succéderont suivant les lois que nous avons données (808, 809) pour les arrangements, permutations et combinaisons.

### Passage au second membre.

**882.** Considérons une équation quelconque dont le second membre soit nul et dont le premier ait ses termes bien ordonnés et bien groupés. Il peut arriver que ce premier membre soit la somme ou la différence de deux parties très nettement distinctes et possédant chacune son individualité propre. D'après tous nos principes, nous devrons le plus possible séparer ces deux parties et les mettre chacune en évidence. Le meilleur moyen d'y parvenir consistera évidemment à laisser l'une d'elles au *premier membre* de la relation, et à faire passer l'autre au *second*.

**883.** Je copie dans un bon Livre l'identité

$$\begin{aligned}(x-a)^2(c-b)+(x-b)^2(a-c)\\ +(x-c)^2(b-a)+(b-a)(c-b)(a-c)=0,\end{aligned}$$

où le premier membre, dont la fin est d'ailleurs mal ordonnée, nous offre deux parties nettement différentes : le dernier terme et l'ensemble des trois premiers. Nous ferons passer ce dernier terme au second membre, et écrirons l'identité sous la forme

$$\begin{aligned}(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2\\ +(a-b)(x-c)^2=-(b-c)(c-a)(a-b),\end{aligned}$$

qui nous semble irréprochable.

L'identité ci-dessous,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)(x+b)}\\ +\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)},\end{aligned}$$

qui semble fort analogue à la précédente, est, au contraire, bien écrite. On aurait tort d'y tout faire passer au premier membre, puisque ce premier membre, après cette opération, se composerait de deux parties disparates.

884. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

qui représente un ellipsoïde, nous offre un premier membre composé de deux groupes, de natures en quelque sorte opposées. On fera bien de l'écrire sous cette forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On fera bien, de même, d'écrire sous la forme

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$$

l'équation du paraboloïde elliptique, au lieu de la laisser sous la forme

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

Il est un cas toutefois où il serait bon de réduire à zéro les seconds membres des équations de cet ellipsoïde et de ce paraboloïde : c'est celui où l'on aurait à se servir des équations canoniques de leurs plans tangents, de leurs normales, de leurs plans polaires, etc., lesquelles supposent toujours, dans les équations des surfaces, les seconds membres nuls.

885. C'est l'usage, dans les équations *différentielles linéaires*, de faire passer au second membre le terme indépendant de la fonction $y$ et de ses dérivées. On devra d'autant plus se conformer à cette habitude qu'elle est, pour ainsi dire, consacrée par le langage. Ces équations différentielles, en effet, se partagent en deux classes : les équations *sans second membre*, les équations *avec second membre*.

### Sur les dénominateurs.

886. Nous savons que l'on peut, sous certaines conditions, mul-

tiplier ou diviser par une même quantité les deux membres d'une relation quelconque. Dans quels cas doit-on effectuer ou non cette transformation? Quelles quantités doivent figurer en numérateurs? Quelles autres, en dénominateurs? C'est ce que nous allons examiner.

887. Soit une équation algébrique où l'inconnue, supposée unique, se trouve en dénominateur. Supposons qu'on en veuille étudier les racines. On fera passer tous les termes au premier membre et l'on chassera les dénominateurs, afin de réduire l'équation à la forme $f(x) = 0$, où $f(x)$ désigne un polynome entier.

Toutefois, il n'est pas toujours indispensable de ramener ainsi le premier membre à la forme entière. Considérons, par exemple, les quadriques homofocales représentées par l'équation

$$\frac{X^2}{a^2+\rho} + \frac{Y^2}{b^2+\rho} + \frac{Z^2}{c^2+\rho} - 1 = 0,$$

et demandons-nous la nature de celles d'entre elles qui passent par le point donné $x$, $y$, $z$. Il nous suffit pour l'obtenir d'étudier les valeurs de $\rho$ qui vérifient l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho} - 1 = 0.$$

Or, dans le cas général où $a$, $b$, $c$ sont inégaux, on peut très bien, sans chasser les dénominateurs, établir que ces racines sont toutes réelles, et en effectuer la séparation.

888. Le plus souvent, ce qui détermine la manière d'écrire, c'est la nécessité de mettre en évidence les *correspondances* existant entre certaines variables et certaines constantes.

Dans l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la correspondance qui existe entre les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque et les longueurs $a$, $b$, $c$ des demi-axes est très bien marquée. Elle ne l'est presque plus lorsqu'on écrit cette équation sous la forme

$$b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

qu'on rencontre encore en certains Ouvrages.

Considérons le triangle dont les côtés ont pour équations respectives

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0.$$

L'équation générale des coniques qui lui sont circonscrites peut s'écrire

$$\alpha QR + \beta RP + \gamma PQ = 0,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des coefficients arbitraires. Cette équation n'est point mal écrite. On peut cependant l'écrire mieux. C'est ce qu'on fait en lui donnant la forme

$$\frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{Q} + \frac{\gamma}{R} = 0,$$

qui rend manifestes les correspondances existant entre les polynomes P, Q, R et les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

889. Dans cet exemple, comme dans le précédent, on a été conduit à mettre certaines quantités en dénominateurs. Dans l'équation

$$\frac{\lambda}{YZ} + \frac{\mu}{ZX} + \frac{\nu}{XY} = 0,$$

il convient, au contraire, de faire passer X, Y, Z en numérateurs et d'écrire

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

pour que les correspondances soient admirablement marquées.

### Correspondances à bien indiquer.

890. Ce souci de rendre manifestes certaines *correspondances* a pour effet de simplifier beaucoup les formules, de les rendre plus claires et plus faciles à retenir.

891. Soit à montrer la loi de formation de la dérivée du produit $y = uvw$. On pourra écrire

$$y' = u'vw + uv'w + uvw';$$

mais il vaudra bien mieux se servir de la *dérivée logarithmique* et

écrire la formule

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w},$$

qui se trouve déjà dans le Traité des fluxions de Maclaurin.

*A fortiori,* devrait-on l'employer s'il s'agissait de calculer la dérivée du produit

$$X = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda},$$

car la considération de cette dérivée logarithmique nous donnerait alors la formule

$$\frac{X'}{X} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c} + \ldots + \frac{\lambda}{x-l},$$

qui est évidemment fort remarquable.

Un de mes amis, géomètre éminent, écrit le développement du binome sous cette forme

$$\frac{(x+y)^m}{m!} = \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m-1}y}{(m-1)!\,1!} + \frac{x^{m-2}y^2}{(m-2)!\,2!} + \ldots,$$

qui est très simple et très régulière.

**892.** Il suffit parfois, pour rendre les formules régulières, élégantes, de mettre en dénominateur certains coefficients numériques. L'équation du troisième degré étant écrite

$$x^3 + px + q = 0,$$

la condition pour que ses trois racines soient réelles et distinctes s'exprime par l'inégalité

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

Or, cette inégalité gagne beaucoup à ce qu'on en divise les deux membres par le produit de ses coefficients. Elle se met, en effet, alors sous la forme

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0,$$

qui est très nette et qui possède une grande vertu mnémonique.

## Équations canoniques.

893. Le mot *canon*, dans l'ancienne Algèbre, a presque constamment la signification de formule ou de règle. Cette dernière acception se retrouve dans la locution *équation canonique;* aussi les équations ainsi nommées sont-elles presque toujours des équations très régulières, très symétriques, très bien écrites et, pour ainsi dire, parfaites.

894. La droite qui passe par les deux points $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ a pour équation canonique

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La droite qui passe par le point $(x, y)$ et dont les coefficients directeurs sont $(\alpha, \beta)$ a pour équation canonique

$$\frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta}.$$

Ces deux équations sont très bien écrites; elles sont très régulières, très symétriques; de plus, elles peuvent se généraliser immédiatement; il suffit : d'ajouter une ligne et une colonne au déterminant que nous offre la première pour obtenir l'équation canonique du plan passant par 3 points; — d'ajouter un rapport analogue à ceux que nous offre la seconde pour obtenir, dans l'espace, les équations de la droite de direction donnée passant par un point donné.

Il est bien évident, d'ailleurs, que les équations non canoniques

$$Y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(X - x_1), \qquad Y - y = \frac{\beta}{\alpha}(X - x),$$

malgré l'usage continuel qu'on en fait, ne sont ni symétriques, ni susceptibles de généralisation.

895. L'équation *canonique* de la tangente à une courbe plane s'écrit à volonté sous l'une ou l'autre de ces deux formes :

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}, \qquad (X - x)f_x + (Y - y)f_y = 0.$$

$f$ désignant le premier membre de l'équation de la courbe. Sous l'une quelconque de ces formes, cette équation est parfaite et se généralise immédiatement, nous donnant : sous la première forme, les équations canoniques de la tangente à une courbe gauche; — sous la seconde, l'équation canonique du plan tangent à une surface.

Il en est de même de l'équation canonique de la normale à une courbe plane. Elle s'écrit indifféremment

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0, \qquad \frac{X - x}{f_x} = \frac{Y - y}{f_y}.$$

Sous chacune de ces formes encore, cette équation est parfaite. Elle se généralise immédiatement aussi, nous donnant : dans le premier cas, l'équation canonique du plan normal à une courbe gauche; — dans le second, les équations canoniques de la normale à une surface.

Nous possédons ainsi, dans le plan, *deux* formes d'*équations canoniques* pour la tangente et deux pour la normale. Les équations canoniques que nous en tirons par généralisation se rapportent dans l'espace à 4 objets différents et non plus seulement à 2. Ce résultat s'explique de lui-même si nous remarquons que l'espace à 2 dimensions ne nous présente qu'un seul être géométrique : la ligne; tandis que l'espace à 3 dimensions nous en présente deux : la ligne et la surface.

### Abréviations dans les équations.

896. Les équations qui renferment, dans l'un ou l'autre de leurs membres, des termes très nombreux peuvent s'écrire évidemment sous forme abrégée.

897. On connaît les équations

$$f = \sum f_i, \qquad m = \sum m_i$$

qui donnent la résultante de plusieurs forces parallèles et le moment résultant de plusieurs moments. Elles sont très claires et très nettes.

Si l'on appelle système linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre le système des surfaces qu'on obtient en combinant linéairement les équations de

$n+1$ surfaces, l'équation de ce système [1] peut s'écrire

$$\sum_{1}^{n+1}{}_i \lambda_i U_i = 0.$$

Je trouve, dans la théorie des invariants [2], l'équation

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\binom{n}{\nu}} (-1)^{\rho} \Delta_{\rho}^{(\nu)} D_{\rho}^{(n)}.$$

Je trouve de même, dans un Traité de calcul intégral [3],

$$\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{k} dy_{\alpha} + \sum_{\beta} N_{\beta}^{k} d\varphi_{\beta} = 0$$

$$(\alpha = 0, \ldots, n-i; \quad \beta = 1, 2, \ldots, i).$$

Ce sont là des équations où figurent des notations abrégées assez compliquées.

898. Comme nous l'avons déjà vu (839), la notation usuelle des déterminants n'est qu'une notation abrégée. On l'emploie souvent dans les équations. La théorie des fonctions symétriques [4] nous donne l'équation

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \sum \left[ \prod (x_1, x_2, x_3) \right]^2,$$

où $x_1$, $x_2$, $x_3$ sont les racines d'une équation du 3e degré, et $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$ les sommes des puissances semblables de ces racines.

C'est sous la forme

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\widehat{BA} & \cos\widehat{CA} & \cos\widehat{DA} \\ \cos\widehat{AB} & -1 & \cos\widehat{CB} & \cos\widehat{DB} \\ \cos\widehat{AC} & \cos\widehat{BC} & -1 & \cos\widehat{DC} \\ \cos\widehat{AD} & \cos\widehat{BD} & \cos\widehat{CD} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

---

(1) G. Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques*, in-8°, Paris, 1870, t. I.
(2) Gordan, *Invarianten-theorie*, t. I, p. 82.
(3) Jordan, *Cours d'Analyse*, in-8°, Paris, 1887, t. III, p. 49.
(4) Rubini, *Complemento agli elementi d'Algebra*, in-8°, Napoli, 1867, p. 105.

que s'écrit la relation existant entre les cosinus des dièdres, formés par les 4 faces A, B, C, D d'un tétraèdre.

L'équation en S d'un degré quelconque pourrait très bien s'écrire aussi sous la forme d'un déterminant égalé à zéro. Toutefois, s'il s'agissait d'étudier cette équation, par exemple de démontrer que toutes ses racines sont réelles, il serait bon de développer ce déterminant et d'ordonner le polynome obtenu suivant les puissances décroissantes de S.

899. L'emploi des déterminants, pris sous leur forme abrégée, permet de donner à certains résultats un aspect facile à retenir.

Supposons que $\varphi$ soit une fonction arbitraire de $u$ et de $v$; $u$ et $v$, des fonctions connues de $x$, $y$, $z$; mais $z$, une fonction inconnue de $x$, $y$; et que l'on ait

$$\varphi(u, v) = 0.$$

L'élimination de la fonction arbitraire $\varphi$ conduit, on le sait, à une équation linéaire aux *dérivées partielles* de $z$, dérivées que l'on représente, depuis Monge, par les lettres $p$ et $q$. On pourrait chaque fois former cette équation par le calcul. On peut l'écrire immédiatement, si l'on établit, une fois pour toutes, qu'elle se peut mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & p \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & q \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

qui est très régulière et se retient très bien.

900. Considérons encore la condition nécessaire et suffisante pour que le trinome

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

où P, Q, R sont des fonctions données de $x$, $y$, $z$, soit une *différentielle totale exacte*. Cette condition s'exprime, on le sait, par l'égalité

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = 0,$$

qui est fort régulière, mais demande une certaine attention. Ne

vaut-il pas mieux l'écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} P & \partial P & \frac{1}{\partial x} \\ Q & \partial Q & \frac{1}{\partial y} \\ R & \partial R & \frac{1}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

bien que cette forme soit purement *mnémonique,* les deux termes de chaque dérivée partielle y étant séparés l'un de l'autre ?

### Ordre des deux membres.

901. Supposons choisies les deux expressions qui doivent constituer les deux membres d'une relation quelconque. Dans quel ordre faut-il écrire ces deux expressions? Laquelle des deux doit être mise au premier membre, laquelle au second ? La réponse est facile lorsqu'on se rappelle la nature de la relation et le but qu'on vise en l'écrivant.

Une relation n'est autre chose qu'une *proposition* dont le premier membre est le *sujet,* dont le second est l'*attribut,* et dont le signe de relation précisément est le *verbe.* Le but qu'on se propose, lorsqu'on écrit une relation, c'est d'instruire le lecteur en lui faisant connaître une *propriété du sujet* de la proposition, c'est-à-dire du premier membre de la relation.

902. L'égalité

$$x = 1$$

est utile. Elle m'apprend que l'inconnue $x$ est égale à l'unité. — L'égalité

$$1 = x$$

est absurde. Son premier membre est 1 ; je le connais; ai-je besoin qu'une égalité vienne me renseigner sur son compte ?

De même, il est absurde d'écrire, comme on le fait en certains Livres,

$$0 = m, \qquad 0 = \sin n\varphi,$$

$$0 = a^2 - r^2 \sin n\varphi, \qquad 0 = A - \sqrt[n+1]{A^2 + \frac{r}{na}}.$$

En chacune de ces égalités, le zéro devrait être placé au second membre.

Il se peut, à la vérité, qu'un calcul conduise à une relation commençant par un zéro. Il ne faut jamais la conserver sous cette forme.

903. Si je définis les lettres $a$, $g$, $h$ par des égalités, je dois placer ces lettres aux premiers membres. Les égalités de définition

$$a - b = a, \qquad \sqrt{ab} = g, \qquad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{h}$$

sont donc mal écrites.

Si je veux définir, à l'aide d'une égalité, la fonction représentée par $f(x, y)$, je place $f(x, y)$ au premier membre, et j'écris au second cette même fonction sous forme explicite.

904. Pour exprimer, à l'aide d'une égalité, la règle de la multiplication d'une somme par un nombre, on écrit

$$(B_1 - B_2 - B_3)A = B_1 A - B_2 A - B_3 A,$$

indiquant au premier membre l'opération à effectuer, et au second le résultat qu'on doit obtenir. — Pour écrire que la fonction I des coefficients d'une forme est un invariant, on écrit, par exemple,

$$I_1 = H^2 I,$$

en désignant par H le *module de la transformation*, et en plaçant au premier membre la nouvelle valeur $I_1$ de I, nouvelle valeur sur laquelle, en effet, on veut nous renseigner. — Pour exprimer que le produit de deux sommes de quatre carrés est lui-même une somme de quatre carrés, on indique au premier membre le produit de ces deux sommes, et, au second, ce produit effectué et bien décomposé en 4 carrés.

905. Si l'on désigne deux variables par $x$ et $y$, on exprimera que leur somme est constante à l'aide de l'égalité

$$x + y = a,$$

où la somme $x + y$ occupe le premier membre.

On sait, d'ailleurs, qu'une foule de *lois physiques* reviennent à écrire qu'une fonction de certaines variables conserve une valeur

constante. On exprimera toujours une pareille loi par une égalité où la fonction sera au premier membre et la constante au second.

906. Tous les exemples que nous avons donnés se rapportent à des *égalités;* mais ce que nous venons de dire subsiste pour toutes les *inégalités* et, en général, pour toutes les *relations*. Il faudra toujours écrire les deux membres dans cet ordre : inconnues, puis connues; — opérations indiquées, puis résultats de ces opérations; — expression donnée, puis propriétés de cette expression; — expression variable, puis constante à laquelle elle ne cesse point d'être égale. En résumé, il faudra que les deux membres de la relation soient écrits toujours *dans un ordre tel* que cette relation donne à son lecteur le maximum de renseignements, le maximum d'instruction.

---

# CHAPITRE VII.

## RELATIONS CONTINUES.

### Égalités continues.

907. J'appelle *égalité* ou *équation continue* une suite d'éléments (nombres, quantités ou expressions quelconques) dont chacun est séparé du suivant par un signe $=$. Telles sont les suites

$$a = b = c = d = e,$$

$$p = q = r = o.$$

Il est évident que, si le nombre des éléments est $n$, celui des signes $=$ est $n - 1$, et que l'équation continue considérée équivaut à $n - 1$ équations distinctes. La première des équations continues ci-dessus équivaut au système des 4 équations

$$a = b, \quad b = c, \quad c = d, \quad d = e;$$

la seconde, au système des 3 équations

$$p = q, \quad q = r, \quad r = o.$$

On pourrait dire que ces deux équations continues ne sont respectivement autres choses que ces deux systèmes dont les équations ont été rapprochées et, si j'ose ainsi parler, contractées.

908. Il suit de cette contraction qu'en toute équation continue chaque élément, sauf les deux extrêmes, est à la fois le *second membre* d'une équation et le *premier* de l'équation suivante; en d'autres termes, que chaque élément, sauf toujours les deux extrêmes, constitue l'attribut d'une proposition et le sujet d'une autre. Dans les langues usuelles, en français par exemple, un même mot, non répété, ne saurait être à la fois sujet et attribut dans deux

phrases consécutives. Une équation continue ne saurait donc se traduire littéralement en langage ordinaire.

Reprenons l'équation continue

$$a = b = c = d = e.$$

Nous la lisons, suivant l'usage, $a$ égale $b$ égale $c$ égale $d$ égale $e$, sans virgule, formant ainsi une phrase incorrecte, qui n'appartient à aucune langue, mais qui est la traduction littérale de l'algorithme algébrique. — Si nous la lisions, en y mettant des virgules, $a$ égale $b$, égale $c$, égale $d$, égale $e$, nous exprimerions que la même quantité $a$ est égale à chacune des quantités $b$, $c$, $d$, $e$, ce qui ne laisserait point que de surprendre l'auditeur, puisque nous ne lui aurions pas dit auparavant que ces 4 dernières quantités étaient égales entre elles, et ce qui aurait pour effet immédiat d'établir, à l'avantage de $a$, une véritable dissymétrie. Il vaudrait beaucoup mieux dire, d'un seul coup, les 5 nombres $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ sont égaux entre eux : ce dernier procédé présenterait même cet avantage de traiter ces 5 nombres symétriquement.

Quant à l'équation continue

$$p = q = r = 0,$$

qu'il eût mieux valu écrire

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0,$$

la meilleure manière de la lire consisterait à dire : les nombres $p$, $q$, $r$ sont tous nuls.

909. Considérons l'équation générale des *quadriques* sous la forme, très imparfaite, qu'on lui donne d'habitude

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + \ldots = 0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle représente une *sphère* s'expriment par les deux équations continues

$$A = A' = A'',$$

$$B = B' = B'' = 0,$$

et doivent s'énoncer ainsi : *Pour que la surface représentée soit une sphère, il faut et il suffit que les coefficients des carrés*

*des variables soient égaux entre eux, et que les coefficients des rectangles soient tous nuls.*

910. Dans tous les exemples qui précèdent, chaque élément est représenté par une seule lettre. Il se pourrait qu'il consistât en une expression quelconque. C'est à l'aide de l'équation continue

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$$

que Cremona a [1] exprimé l'égalité existant entre 4 rapports anharmoniques.

911. Cependant il ne faut point abuser des équations continues. C'est un tort de désigner l'origine des coordonnées par

$$x = y = z = 0.$$

Il serait si simple de l'appeler le point (0, 0, 0), ou le point dont les 3 coordonnées sont nulles!

### Relations continues.

912. De même que l'on considère des *égalités continues,* on peut considérer des *inégalités continues* ou, plus généralement, des *relations continues* quelconques. On peut considérer, par exemple, l'inégalité continue

$$a < b < c < d,$$

et la relation continue

$$p = q = r.$$

Chacune de ces relations continues équivaut à un système de relations simples. La première, au système des 3 relations

$$a < b, \quad b < c, \quad c < d;$$

la seconde, au système des 2 relations

$$p = q, \quad q = r.$$

---

[1] *Géométrie projective,* traduction française, in-8°, Paris, p. 51.

Les relations continues pourraient être regardées comme le résultat de la juxtaposition, avec contraction, des relations simples au système desquelles elles sont équivalentes.

913. Il suit de là, pour la lecture de ces relations continues, les mêmes difficultés que pour celles des égalités continues.

Considérons l'inégalité continue

$$a < b < c < d.$$

Si on lit, sans virgule, $a$ plus petit que $b$ plus petit que $c$ plus petit que $d$, on forme une phrase qui n'appartient à aucune langue. Si on lit, avec virgules, $a$ plus petit que $b$, plus petit que $c$, plus petit que $d$, le nombre $a$ paraît seul en cause : on ne fait point connaître les grandeurs relatives des nombres $b$, $c$, $d$. — Le mieux, ce serait de dire les relations simples au système desquelles la relation continue équivaut, ou bien d'employer l'énoncé sans virgule que nous venons de critiquer, en le regardant, bien entendu, comme une abréviation des plus incorrectes.

914. Supposons qu'il s'agisse d'exprimer : que S est plus grand que A, mais plus petit que B; — que $x$, qui est supérieur à $\alpha$, est compris entre $\alpha$ et $\beta$; — que la différence $b_n - a_n$, qu'on sait positive, est inférieure à $\varepsilon_n$. On écrira les 3 *inégalités continues*

$$\begin{gathered} A < S < B, \\ \alpha < x < \beta, \\ 0 < b_n - a_n < \varepsilon_n. \end{gathered}$$

Il n'y a là nulle difficulté.

Or, dans un Ouvrage excellent, je trouve ces 3 égalités continues écrites sous ces formes,

$$\begin{gathered} S > A < B, \\ x > \alpha < \beta, \\ b_n - a_n > 0 < \varepsilon_n, \end{gathered}$$

qui sont évidemment absurdes. C'est là évidemment une distraction de l'auteur. Ne proviendrait-elle pas de ce qu'il se prononçait à lui-même, en écrivant, les phrases : S *plus grand que* A *mais plus petit que* B; $x$ *supérieur à* $\alpha$ *mais inférieur à* $\beta$; $b_n - a_n$

*positif mais moindre que* $\varepsilon_n$; et qu'il écrivait à mesure, comme il parlait? N'aurait-il pas dû, pour être correct, écrire par exemple, dans le premier cas,

$$S > A, \quad < B,$$

en introduisant au milieu de son Algèbre, et contrairement à tout bon usage, une forte virgule de ponctuation? Rien de plus propre que la présente faute à mettre en relief le désaccord existant entre l'écriture algébrique des inégalités continues et le langage que l'on parle en les lisant ou les écrivant.

### Quantités proportionnelles.

**915.** Les quantités *proportionnelles,* soit directement, soit inversement, jouent, dans toutes les Mathématiques, un rôle de la plus haute importance. Il est donc nécessaire de les définir d'une façon très précise.

**916.** Soient deux suites de quantités ou nombres

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \ldots, \end{array}$$

qui se correspondent chacun à chacun. Les nombres de la première suite sont *directement proportionnels* aux nombres de la seconde, si le *rapport* d'un nombre quelconque de la première suite au nombre correspondant de la seconde possède une valeur *constante,* c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{d}{\delta} = \ldots.$$

Il est, d'ailleurs, évident que, lorsqu'il en est ainsi, les éléments de la seconde suite sont directement proportionnels à ceux de la première. La propriété est *réversible.*

**917.** Nous disons, au contraire, que les nombres de la première suite sont *inversement proportionnels* aux nombres de la seconde, lorsqu'ils sont directement proportionnels aux *inverses* de ces der-

niers, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\frac{a}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{b}{\frac{1}{\beta}} = \frac{c}{\frac{1}{\gamma}} = \frac{d}{\frac{1}{\delta}} = \ldots :$$

et cette définition explique très bien l'emploi de la locution *inversement proportionnels*.

Cette nouvelle suite de rapports égaux peut, d'ailleurs, se mettre sous la forme

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta = \ldots.$$

qui montre très bien que la propriété définie est *réversible,* et qui conduit à cette définition nouvelle : *les nombres de deux suites sont inversement proportionnels lorsque deux nombres correspondants de ces suites ont un produit constant.*

918. On le voit, ces deux notions, de nombres directement proportionnels et de nombres inversement proportionnels, conduisent l'une et l'autre à des égalités *continues,* et les nombres égalés sont : dans le premier cas, tous des *rapports;* dans le second, tous des *produits*. On voit aussi que, dans les rapports, les nombres d'une même suite sont placés tous en numérateur ou tous en dénominateur. C'est là une circonstance heureuse : nous savons, en effet, que l'on peut, dans une suite de rapports égaux, ajouter les rapports termes à termes; et nous savons, d'un autre côté, qu'on ne peut additionner entre elles que des quantités de même nature.

### Proportions.

919. Lorsque les suites de nombres proportionnels n'en contiennent chacune que *deux,* $a$, $b$ pour la première, $\alpha$, $\beta$ pour la seconde, ces *quatre* nombres forment ce qu'on appelle une *proportion*. Pour étudier les proportions, nous devons, d'ailleurs, distinguer deux cas, car les éléments $a$, $b$ de la première suite peuvent être proportionnels aux éléments $\alpha$, $\beta$ de la seconde, soit directement, soit inversement.

920. Supposons d'abord qu'ils leur soient *directement* proportionnels. D'après la définition même des quantités directement

proportionnelles, nous aurons

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}.$$

Telle est la seule forme que notre proportion doive affecter. Ce serait une grosse faute, non point de calcul mais d'écriture, que de l'écrire, comme on le fait souvent,

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Cette nouvelle forme, en effet, ne nous rappellerait point la définition des quantités directement proportionnelles; — ne nous offrirait point, tous deux en numérateurs, ou tous deux en dénominateurs, les éléments de chaque couple; — ne se prêterait ni à l'addition des rapports égaux termes à termes, ni à l'extension de la relation trouvée à de nouveaux rapports égaux.

La forme

$$a\beta = b\alpha$$

serait aussi fautive, nous présentant, à très peu près, les mêmes inconvénients.

921. Soient $a$ et $b$ deux arcs d'un même cercle, $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ les angles au centre correspondants. On écrira la proportion qui existe entre ces 4 quantités sous la forme

$$\frac{\widehat{\alpha}}{a} = \frac{\widehat{\beta}}{b}.$$

Soient BAC un triangle; I le point où la bissectrice de l'angle intérieur A coupe le côté BC. La propriété connue de cette bissectrice nous donnera immédiatement, entre les valeurs absolues des segments, l'égalité

$$\frac{BI}{BA} = \frac{CI}{CA}.$$

Si la tangente au point M d'une ellipse coupe le grand axe au point T, et que les foyers soient F et G, on aura de même

$$\frac{TF}{MF} = \frac{TG}{MG}.$$

En exprimant que les aires $A_1$, $A_2$ de deux cercles sont entre

elles comme les carrés des rayons, $r_1$, $r_2$, on trouvera encore

$$\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}.$$

Ces quatre dernières proportions sont bien écrites. Pour les raisons que nous avons dites, ce serait une grosse faute d'écriture que d'y permuter les termes extrêmes ou d'y chasser les dénominateurs.

**922.** Supposons maintenant que les deux quantités $a$, $b$ soient *inversement proportionnelles* aux deux quantités $\alpha$, $\beta$. D'après la définition même de ce genre de proportionnalité, nous devrons écrire l'une ou l'autre de ces égalités

$$\frac{a}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{b}{\frac{1}{\beta}}, \qquad a\alpha = b\beta.$$

On commettrait une faute, analogue à celles que nous avons déjà signalées (**920**), en employant l'une ou l'autre de ces nouvelles formes

$$\frac{a}{b} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \frac{a}{\beta} = \frac{b}{\alpha}.$$

L'expérience montre, d'ailleurs, que ces formes fautives sont *difficiles* à écrire; qu'elles exigent beaucoup d'*attention;* et que l'usage qu'on en fait cause souvent des confusions et des erreurs.

**923.** Considérons deux forces F et G, parallèles, de même sens, et respectivement appliquées aux points A et B. Le point I de la droite AB, où l'on peut appliquer la résultante, partage cette droite en parties *inversement* proportionnelles aux forces F et G. On devra donc écrire, en ne considérant que les valeurs absolues des segments,

$$\overline{IA}.F = \overline{IB}.G.$$

Cette manière d'écrire, qui ne cause jamais d'erreur, nous rappelle les *moments* des forces données par rapport au point I ou, ce qui revient au même, le théorème de Varignon [1].

---

[1] Né en 1654, mort en 1722.

**924.** Je trouve dans un Ouvrage l'égalité

$$ab - ba' = 0;$$

dans un autre, l'égalité

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta} = \frac{b}{a}.$$

Ces égalités sont de véritables proportions; elles expriment : la première, que $a$ et $b$ sont *directement* proportionnels à $a'$ et $b'$; la seconde, que $x-\alpha$ et $y-\beta$ sont *inversement* proportionnelles à $a$ et $b$. On devrait les écrire

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \qquad (x-\alpha)a = (y-\beta)b.$$

**925.** En résumé, les proportions, pour être bien écrites, doivent affecter une forme nettement déterminée. Il faut qu'elles montrent, par cette forme même, la correspondance qui existe entre leurs éléments pris deux à deux, et la nature de cette correspondance.

### Anciennes locutions.

**926.** Présentement, en Mathématiques, le mot *rapport* n'a qu'un sens, toujours le même : le rapport de $a$ à $b$ n'est autre chose que le *quotient* de $a$ par $b$. Au dix-huitième siècle, il en avait deux, car on distinguait alors le *rapport arithmétique* et le *rapport géométrique*.

Le *rapport ou raison arithmétique* de deux nombres n'était que l'*excès* du premier sur le second; le *rapport ou raison géométrique* de deux nombres était, comme à présent, le *quotient* du premier par le second. Dès cette époque, les bons auteurs faisaient remarquer [1] que ces locutions, consacrées par l'usage, *raison arithmétique, raison géométrique,* étaient assez mal imaginées.

**927.** On appelait *proportion arithmétique* l'égalité de deux rapports ou raisons *arithmétiques*. Telle était la relation

$$a.a' : b.b',$$

---

[1] L'abbé de La Caille, *Leçons de Mathématiques,* in-8°, Paris, 1784, p. 139.

qui s'énonçait *a est à a' comme b est à b'*, et qui s'écrirait aujourd'hui

$$a - a' = b - b'.$$

Le *point simple* . y remplaçait le signe — et le *point double* : le signe =. Présentement les mots *rapport arithmétique* et *proportion arithmétique,* ainsi que les algorithmes qui leur correspondent, sont absolument inusités.

928. On appelait *proportion géométrique* l'égalité de deux rapports ou raisons *géométriques*. Telle était la proportion

$$c : c' :: d : d',$$

qui s'énoncait *c est à c' comme d est à d'*, et qui s'écrit aujourd'hui

$$\frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}.$$

Le *double point* : y indiquait la division; le *point quadruple* :: y remplaçait le signe =. Présentement, nous considérons encore les proportions géométriques, mais nous les nommons simplement *proportions* et les écrivons, sans algorithme spécial, comme des égalités entre deux rapports.

929. Il est à remarquer, d'ailleurs, que, dans les deux sortes de proportions que l'on considérait, l'algorithme n'était que la traduction littérale de la phrase *a est à a' comme b est à b'*. On pouvait dire, dans l'une et l'autre proportion, que le signe d'*opération* . ou : se prononçait *est à* et que le signe de *relation* : ou :: se prononçait *comme*.

Il est à remarquer aussi que, dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, on remplaçait déjà fréquemment, dans les proportions arithmétiques, le signe : et, dans les proportions géométriques, le signe :: par l'unique signe =.

### Proportions proprement dites.

930. Les *proportions proprement dites,* celles qui se nommaient *proportions géométriques* et qui consistent dans l'*égalité de deux rapports,* ont conservé leur ancien algorithme pendant

tout le XIX^e siècle; peut-être pourrait-on dire qu'elles le conservent encore; présentement, en effet, on écrit à volonté

$$a : \alpha :: b : \beta. \qquad a : \alpha = b : \beta.$$

Évidemment, si l'on considère le double point : comme le signe de la division, la seconde de ces deux formes se confond avec

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta},$$

qui est la forme nouvelle.

931. Quoi qu'il en soit, cette ancienne manière d'écrire,

$$a : \alpha :: b : \beta,$$

possédait un léger avantage, celui de n'occuper sur la page que la hauteur d'une seule ligne; elle le devait à l'emploi du signe : pour indiquer la division; mais elle présentait des inconvénients multiples.

D'abord, elle montrait fort mal les correspondances qui existent entre les éléments pris deux à deux de la proportion. Ensuite, elle ne permettait point facilement de faire les calculs que nous effectuons en ajoutant ou retranchant les rapports termes à termes. Enfin, elle ne se prêtait point à l'écriture des suites de rapports égaux.

932. Cette ancienne manière d'écrire les proportions semblait, d'ailleurs, en faire des relations d'une nature spéciale. Elle avait conduit à inventer, pour en désigner les éléments, les mots d'*antécédents* et de *conséquents*, de *moyens* et d'*extrêmes*. Elle avait conduit, en outre, à énoncer à leur sujet un certain nombre de *règles particulières*. — Ces noms ni ces règles n'ont plus leur raison d'être, puisqu'on écrit et qu'on traite à présent les proportions comme toutes les autres égalités.

### Fautes singulières.

933. Chose curieuse, dans les proportions, écrites à l'*ancienne manière*, que nous offrent des Livres même assez récents, se ren-

contrent constamment des *ambiguïtés* analogues à celles que nous avons signalées déjà (761). On y trouve, par exemple, la proportion

$$a - b + c : d - e + f :: p : q,$$

dont le premier membre manque absolument de précision. Ces ambiguïtés proviennent de l'oubli des parenthèses; elles disparaissent dès qu'on les écrit.

934. Certaines Arithmétiques nous présentent une faute d'écriture assez singulière. Désignant par $x$ le quatrième terme d'une proportion ordinaire, dont les trois premiers sont respectivement 4, 12, 10, et obtenant 30 pour la valeur numérique de $x$, un auteur écrit, sur une seule ligne,

$$4 : 12 :: 10 : x = 30.$$

Il écrit même, d'une façon générale,

$$A : B :: C : x = \frac{B \times C}{A}.$$

Or, il est bien évident que cette manière d'écrire est fautive, puisque l'expression finale de chaque exemple est égale, non pas au rapport qui précède le signe =, mais au dénominateur seulement de ce rapport. De plus, la lettre $x$ remplit, dans chacun de ces exemples, un rôle double, étant à la fois le dernier terme de la proportion initiale et le premier de l'égalité qui la suit.

935. Nous avons rencontré déjà (908), dans les égalités continues, des lettres remplissant ainsi un rôle double, des lettres à deux sens et, pour ainsi dire, à deux fins. — N'en est-il point de même de la lettre $y$ dans cette phrase que j'ai entendue récemment *soit $y$ une fonction de $x$, et $y(x)$ l'expression de cette fonction?*

936. Certains auteurs vont jusqu'à mêler des équations au Tableau des calculs. J'en trouve l'exemple suivant,

$$A = 15a^2x^6 - 19a^3x^5 - \ldots \left| \frac{B = 3ax^4 - \ldots}{Q = 5ax^2 \ldots} \right.,$$

que je copie textuellement, dans une Algèbre récente, à propos de la théorie de la division algébrique.

### Proportions continues.

937. Revenons aux géomètres du XVIII^e siècle. Ils nommaient *proportion continue*, soit arithmétique, soit géométrique, une proportion où les moyens étaient égaux entre eux :

$$a.b : b.c$$

était une proportion continue arithmétique ;

$$\alpha : \beta :: \beta : \gamma.$$

une proportion continue géométrique. Ces relations aujourd'hui s'écriraient respectivement

$$a - b = b - c, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

938. Au lieu d'une seule proportion continue, on en pouvait écrire, sur une seule ligne, un nombre quelconque, par exemple

$$a.b : b.c : c.d : \ldots,$$
$$\alpha : \beta :: \beta : \gamma :: \gamma : \delta :: \ldots.$$

ce qui constituerait aujourd'hui les égalités continues

$$a - b = b - c = c - d = \ldots.$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \ldots.$$

On était amené par là à considérer les suites de nombres

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \ldots$$
$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \ldots$$

dans la première desquelles l'*excès* de chaque nombre sur le suivant est *constant,* tandis que, dans la seconde, c'est le *rapport* de chaque nombre au suivant.

939. Ces suites constituent, la première une *progression arithmétique* et la seconde une *progression géométrique*. Supprimant les signes de relation, on écrivait : la progression arithmétique sous cette forme

$$\frac{\cdot}{\cdot}\ a.b.c.d\ldots;$$

la progression géométrique sous celle-ci

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \alpha : \beta : \gamma : \delta : \ldots.$$

Ces manières d'écrire sont absolument abandonnées. Les signes $\frac{\cdot}{\cdot}$ et $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ auraient même disparu des Mathématiques, si Bourget n'eût eu l'idée (177) de prendre le premier comme signe de l'*exponentation*.

### Vestiges des anciennes notations.

940. On trouve fréquemment, non pas dans les Ouvrages élémentaires, mais dans des Traités plus relevés et dans des Mémoires originaux, certaines expressions et équations contenant plusieurs fois le signe : de la division, et se rattachant à l'ancien algorithme des proportions et progressions géométriques. Ce n'est qu'en se reportant à ces anciens algorithmes que l'on peut arriver à comprendre nettement le sens de ces expressions ou équations.

941. Nous rencontrons, par exemple, ces locutions : « *les rapports*

$$a : b : c : »$$

« *les rapports*

$$\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \ldots : \gamma_n \text{ ».}$$

Le sens n'en est pas évident. Pour le comprendre, il faut considérer chacun de ces groupes comme composé de termes consécutifs d'une progression géométrique et comme représentant le rapport de chacun d'eux au suivant; il faut, en d'autres termes, considérer d'une part les deux rapports

$$\frac{a}{b},\quad \frac{b}{c};$$

de l'autre les $n - 1$ rapports

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2},\quad \frac{\gamma_2}{\gamma_3},\quad \ldots,\quad \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n};$$

mais en se gardant bien de croire que ces rapports, comme dans les progressions, possèdent tous la même valeur. — Par ces explications, les expressions considérées deviennent claires et précises.

Prises en elles-mêmes, elles étaient obscures et ambiguës. C'étaient de *mauvaises notations* qu'on eût mieux fait de ne pas employer.

942. On peut en rapprocher les équations

$$a : b : c : \ldots = \alpha : \beta : \gamma : \ldots$$
$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots = X : X_1 : X_2 : \ldots$$

qui s'écrivaient autrefois avec le signe :: à la place du signe =, ainsi qu'en témoignent ces anciens exemples

$$S : S' : S'' : S''' :: R : \cos A' : \cos A'' : \cos A''' \quad (^1),$$
$$P : Q : R :: \overline{AB} : \overline{AC} : \overline{AD} \quad (^2).$$

Sous l'une ou l'autre de ces formes, ces équations expriment que les quantités figurant à leurs premiers membres sont directement proportionnelles à celles qui figurent à leurs seconds. Elles équivalent chacune à une équation continue formée d'une suite de rapports égaux. Il eût été bien préférable d'écrire la dernière, par exemple, sous la forme

$$\frac{P}{\overline{AB}} = \frac{Q}{\overline{AC}} = \frac{R}{\overline{AD}};$$

ou de dire simplement les quantités P, Q, R sont directement proportionnelles à AB, AC, AD; ou enfin, ce qui revient au même, deux éléments correspondants de ces deux suites, P, Q, R et AB, AC, AD, sont l'un à l'autre dans un rapport constant. Les manières d'écrire que nous venons de montrer constituent évidemment de mauvaises notations.

---

(1) Lacroix, *Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes*, in-8°, Paris, 1802, p. 47.

(2) Gaspard Monge, *Traité élémentaire de Statique*, in-8°, Paris, an III, p. 29.

# CHAPITRE VIII.

## SYSTÈMES D'ÉQUATIONS.

### Couples d'équations analogues.

943. Les règles qui régissent les couples d'*équations analogues* reviennent toutes à dire que ces équations doivent être écrites de telle sorte que leurs *analogies* ainsi que leurs *différences* soient nettement marquées.

944. Lorsque les deux équations ont leurs seconds membres nuls, sont algébriques, du même degré et relatives aux mêmes inconnues, il suffit que les deux groupes formés par leurs coefficients soient analogues. Le couple

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$
$$b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$$

est bien écrit; et il en est de même du couple

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0,$$
$$u_2 x + v_2 y + w_2 z = 0.$$

Au contraire, le couple

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

qui représente deux droites analogues, est mal écrit, l'*absence* d'accents aux coefficients de la première équation donnant à celle-ci une sorte de prééminence.

945. Un auteur considère le couple des deux équations analogues

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$
$$A'x^2 + B'x + C' = 0,$$

qui est, d'ailleurs, mal écrit : il appelle $x'$, $x''$ les racines de la première, puis $x'_1$, $x''_1$ celles de la seconde. — Un autre considère les équations

$$a_0 x^m - a_1 x^{m-1} + \ldots = 0,$$
$$b_0 x^p + b_1 x^{p-1} - \ldots = 0;$$

il désigne les racines de la première par $x_1$, $x_2$, ..., celles de la seconde par $x'_1$, $x'_2$, .... — Il serait difficile, dans l'un et l'autre cas, d'imaginer de plus mauvaises notations.

946. Les deux équations

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \cos^{-1}\frac{x}{a}, \qquad \int_x^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{ch}^{-1}\frac{x}{a}$$

forment un couple excellent, les deux premiers membres différant par l'interversion des lettres $x$ et $a$; les deux seconds, par la substitution du cosinus hyperbolique au cosinus ordinaire.

### Couples d'équations de définition.

947. Dans certains couples d'équations, les premiers membres ne sont autres choses que les *noms* attribués aux seconds. On pourrait dire aussi que les seconds membres ne sont que la forme explicite des fonctions désignées par les premiers. Chacune de ces équations est une équation de *définition*. Des couples de pareilles équations se rencontrent à chaque instant.

948. Les deux formules

$$x = a\cos\alpha + a^2\cos 2\alpha + \ldots + a^n\cos n\alpha,$$
$$y = a\sin\alpha + a^2\sin 2\alpha + \ldots + a^n\sin n\alpha$$

forment un couple de cette sorte. Ce couple est bien écrit, les lettres $x$ et $y$ désignant deux sommes correspondant l'une aux cosinus, l'autre aux sinus. — Peut-être cependant eût-il mieux valu représenter la première par l'initiale C et la seconde par l'initiale S.

949. Les deux couples

$$(1)\qquad \begin{cases} u = u_0 - u_1 + u_2 - \ldots \\ v = v_0 + v_1 - v_2 - \ldots \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} A = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} + \ldots \\ B = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} - b_2 x^{p-2} + \ldots \end{cases}$$

sont bien écrits : leurs premiers membres sont parfaits.

950. Au contraire, dans les deux couples

$$(1)\qquad \begin{cases} f = A x^2 + A' y^2 + \ldots \\ g = A_1 x^2 + A'_1 y^2 - \ldots \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} f(x) = a_m (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_m), \\ \varphi(x) = b_n (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n), \end{cases}$$

les premiers membres sont très mal choisis.

951. Considérons les deux égalités

$$\varphi_1(u) = \frac{A}{u - a} + \frac{A_1}{(u - a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u - a)^\alpha},$$

$$\varphi_2(u) = \frac{B}{u - b} + \frac{B'_1}{(u - b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(u - b)^\beta},$$

qui figurent dans un bon Livre. Leurs seconds membres diffèrent l'un de l'autre par la substitution des lettres B, $b$, $\beta$ aux lettres A, $a$, $\alpha$. Leurs premiers membres eussent dû différer d'une façon semblable. Au lieu d'affecter les caractéristiques $\varphi$ des indices 1 et 2, on eût dû les affecter des indices $a$ et $b$, ou bien $\alpha$ et $\beta$.

952. Dans ces derniers exemples, il ne s'agit au fond, pour bien écrire les équations, que de donner des noms convenables à leurs premiers membres. Aussi n'avons-nous eu, pour rédiger le présent paragraphe, qu'à répéter pour ainsi dire ce que nous avions précédemment énoncé.

### Trois équations analogues.

953. Il serait difficile de trouver des systèmes de 3 *équations*

*analogues* plus simples que chacun des deux suivants :

$$\Omega \cos\alpha = p, \qquad a = \frac{dx}{ds},$$

$$\Omega \cos\beta = q, \qquad a' = \frac{dy}{ds},$$

$$\Omega \cos\gamma = r, \qquad a'' = \frac{dz}{ds}.$$

Le premier est très bien écrit. Le second ne l'est pas, les lettres accentuées $a$, $a'$, $a''$ correspondant mal aux lettres différentes $x, y, z$.

Ce nouveau système

$$x = \xi + X, \qquad y = \eta + Y, \qquad z = \zeta + Z,$$

qui répond à un changement de coordonnées, nous semble de tous points parfait.

Le système

$$\frac{x}{a+\lambda} + \frac{y}{b-\lambda} + \frac{z}{c-\lambda} = 1,$$

$$\frac{x}{a+\mu} + \frac{y}{b+\mu} + \frac{z}{c-\mu} = 1,$$

$$\frac{x}{a+\nu} + \frac{y}{b+\nu} + \frac{z}{c+\nu} = 1$$

est encore très bien écrit. Il rappelle celui qu'on rencontre dans la théorie des quadriques homofocales.

954. Considérons le système

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3 :$$

il est écrit parfaitement. Mais le suivant,

$$a x + b y + c z = k,$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2,$$

est mal écrit, puisque les coefficients de la première équation, n'étant point affectés d'indices, ne sont point analogues à ceux de la deuxième, ni de la troisième.

Dans le système

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k_1, \\ a'x + b'y + c'z &= k_2, \\ a''x + b''y + c''z &= k_3. \end{aligned}$$

les coefficients du premier membre de la première équation devraient être accentués, et les constantes figurant aux seconds membres devraient être $k'$, $k''$, $k'''$. — Dans le système

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d''. \end{aligned}$$

nous trouvons deux fautes graves : les coefficients de la première ligne sont dépourvus d'accents, et les seconds membres, étant représentés par $d$, $d'$, $d''$, semblent être analogues aux coefficients $a$, $a'$, $a''$; $b$, $b'$, $b''$; $c$, $c'$, $c''$.

955. Si l'on écrit à part le système des 3 trinomes analogues

$$\begin{aligned} a\mathrm{P} + a'\mathrm{Q} + a''\mathrm{R}, \\ b\mathrm{P} + b'\mathrm{Q} + b''\mathrm{R}, \\ c\mathrm{P} + c'\mathrm{Q} + c''\mathrm{R}, \end{aligned}$$

on a tort de ne pas accentuer les coefficients de la première colonne; mais, si l'on écrit le système des trois équations,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x &= a\mathrm{P} + a'\mathrm{Q} + a''\mathrm{R}, \\ \tfrac{1}{2} f'_y &= b\mathrm{P} + b'\mathrm{Q} + b''\mathrm{R}, \\ \tfrac{1}{2} f'_z &= c\mathrm{P} + c'\mathrm{P} + c''\mathrm{R}, \end{aligned}$$

on commet une seconde faute, beaucoup plus grave, puisqu'on emploie l'accent à la fois comme simple *indice* dans les seconds membres, et, dans les premiers, comme marque d'une *dérivée*.

956. Parmi les systèmes de 3 équations analogues, linéaires et à 3 inconnues, le système

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3 &= 0, \\ x + by + b^2z + b^3 &= 0, \\ x + cy + c^2z + c^3 &= 0, \end{aligned}$$

est évidemment l'un des plus remarquables que l'on puisse citer. Ses équations se succèdent avec une régularité absolue et sont écrites d'une manière excellente. Il est clair qu'on pourrait former des systèmes pareils de 4 équations à 4 inconnues, de 5 équations à 5 inconnues, etc. Chose singulière, tous ces systèmes, nous le verrons plus tard (1098), peuvent se résoudre sans calcul.

### Systèmes réversibles.

957. La propriété que possèdent certains systèmes d'équations, d'être exactement *réversibles,* les rend plus difficiles à bien écrire. Prenons la substitution linéaire orthogonale

$$\begin{aligned} x &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \\ y &= a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \\ z &= a_3 X + b_3 Y + c_3 Z. \end{aligned}$$

Elle nous donne, par réversion,

$$\begin{aligned} X &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ Y &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ Z &= c_1 x + c_2 y + c_3 z. \end{aligned}$$

Ces systèmes sont-ils bien écrits? — Évidemment non. Les lettres X, Y, Z y sont associées à $a$, $b$, $c$ : c'est une bonne correspondance; mais $x$, $y$, $z$ sont associées aux indices 1, 2, 3, ce qui en est une mauvaise. — Il faudrait remplacer $x$, $y$, $z$ par $u_1$, $u_2$, $u_3$, ou $v_1$, $v_2$, $v_3$, .... Seulement, par ce nouveau mode d'écriture, les nouvelles variables ne ressembleraient plus aux anciennes.

958. Il existerait *deux moyens* d'écrire parfaitement ce système : ou bien appeler $u_1$, $u_2$, $u_3$ les anciennes variables, $v_1$, $v_2$, $v_3$ les nouvelles, et affecter chaque coefficient de deux indices numériques, en cette sorte :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + a_{13} v_3, \\ u_2 &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + a_{23} v_3, \\ u_3 &= a_{31} v_1 + a_{32} v_2 + a_{33} v_3; \end{aligned}$$

ou bien appeler $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les anciennes variables, $x$, $y$, $z$ les nouvelles, et affecter chaque coefficient $a$ des deux variables correspondantes mises en indices, de cette façon :

$$\begin{aligned}\xi &= a_{\xi x}x + a_{\xi y}y + a_{\xi z}z,\\ \eta &= a_{\eta x}x + a_{\eta y}y + a_{\eta z}z,\\ \zeta &= a_{\zeta x}x + a_{\zeta y}y + a_{\zeta z}z.\end{aligned}$$

Dans l'un comme dans l'autre de ces procédés, chaque *coefficient* présenterait *deux indices* rappelant, comme dans les déterminants, l'un, la ligne où il figure et l'autre, la colonne.

Tout ce que nous disons s'étendrait, d'ailleurs, aux systèmes réversibles contenant un nombre quelconque d'équations.

### Combinaisons 2 à 2 des 3 inconnues.

959. On rencontre fréquemment des systèmes de 3 équations à 3 inconnues où chaque équation dépend, d'une façon particulière, d'*une* ou *deux* de ces inconnues. Pour que de tels systèmes soient bien écrits, il faut que ces inconnues soient placées de telle sorte que leur rôle spécial apparaisse de lui-même. Il faut de plus que les combinaisons 2 à 2 des inconnues se succèdent dans l'ordre que leur assigne l'inconnue manquante.

960. Le système

$$\begin{aligned}y - z &= a,\\ z - x &= b,\\ x + y &= c\end{aligned}$$

est parfaitement écrit. — Il en est de même de chacun des systèmes

$$\begin{aligned}yz &= a, & x(y+z) &= a^2,\\ zx &= b, & y(z+x) &= b^2,\\ xy &= c; & z(x+y) &= c^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^2 - yz - z^2 &= a^2,\\ z^2 - zx - x^2 &= b^2,\\ x^2 + xy - y^2 &= c^2.\end{aligned}$$

Quant aux équations de chacun de ces 2 nouveaux systèmes

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1, \qquad ay + bx = c,$$

$$\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 1, \qquad cx - az = b,$$

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1, \qquad bz - cy = a,$$

elles sont bien écrites; mais l'*ordre* où elles se succèdent devrait être renversé.

**961.** Considérons les 2 systèmes

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, \qquad xyz = a^2(x + y),$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{b}, \qquad xyz = b^2(y + z),$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{c}; \qquad xyz = c^2(x - z).$$

Non seulement les équations qui les composent se succèdent suivant un *mauvais ordre*, mais les lettres $a$, $b$, $c$ y correspondent aux combinaisons $xy$, $yz$, $zx$, tandis qu'elles y devraient correspondre, comme toujours, aux combinaisons où $x$, $y$, $z$ manquent, c'est-à-dire aux combinaisons $yz$, $zx$, $xy$.

**962.** Dans le système

$$y + z - x = a,$$
$$z + x - y = b,$$
$$x + y - z = c,$$

c'est l'inconnue affectée du signe moins qui caractérise l'équation. — Dans le système

$$ax + by + cz = (b + c)^2 - a^2,$$
$$bx + cy + az = (c + a)^2 - b^2,$$
$$cx + ay + bz = (a + b)^2 - c^2,$$

ce sont les carrés isolés $a^2$, $b^2$, $c^2$ qui figurent aux seconds membres. — Ces deux systèmes sont bien écrits et bien ordonnés.

### Système de 3 équations de définition.

963. Nous avons considéré plus haut (947) des *couples* d'équations analogues que nous avons appelés *équations de définition*. Nous allons considérer à présent des systèmes de 3 *équations* analogues qui méritent d'être appelés du même nom. Ces systèmes de 3 équations se rencontrent à chaque instant.

964. Dans le système

$$x(x+y+z)=a^2$$
$$y(x+y+z)=b^2$$
$$z(x+y+z)=c^2,$$

les premiers membres sont évidemment caractérisés par leur facteur initial $x, y, z$. En les appelant $a^2$, $b^2$, $c^2$, on les a bien nommés.

965. Dans le système

$$a'^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},$$
$$b'^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4},$$
$$c'^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4},$$

les seconds membres sont caractérisés soit par la moyenne de deux carrés qui les commence, soit par le quart du carré négatif qui les termine. Les premiers membres $a'^2$, $b'^2$, $c'^2$ en sont des notations parfaites. On sait, d'ailleurs, que ces trois équations font connaître les longueurs $a'$, $b'$, $c'$ des médianes d'un triangle en fonction des côtés $a$, $b$, $c$, ces médianes aboutissant respectivement aux milieux de ces côtés.

966. Ces dernières équations pourraient être considérées comme correspondant respectivement aux combinaisons 2 à 2 de 3 lettres. Il en est de même dans les deux systèmes suivants :

$$(1)\quad \begin{cases} L = yZ - zY, \\ M = zX - xZ, \\ N = xY - yX, \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} bz + cy = \alpha, \\ cx - az = \beta, \\ ay + bx = \gamma, \end{cases}$$

dont le premier appartient à la théorie des moments, et qui sont tous les deux parfaitement écrits.

967. Le système

$$a = \frac{1}{H}(y_u z_v - z_u y_v),$$

$$b = \frac{1}{H}(z_u x_v - x_u z_v),$$

$$c = \frac{1}{H}(x_u y_v - y_u x_v)$$

appartient à la théorie des surfaces. Ses seconds membres correspondent respectivement aux lettres manquantes $x$, $y$, $z$. Ses premiers membres sont donc parfaitement nommés.

968. Dans le système des trois équations

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C'',$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C',$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

les premiers membres sont bien écrits et se succèdent dans l'ordre rationnel; mais les seconds ne valent rien. D'abord, ils représentent trois objets analogues par $C''$, $C'$, $C$, où $C$ n'est pas analogue à $C'$ ni à $C''$; — ensuite, ils nous offrent ces lettres dans un ordre contraire à l'ordre indiqué par les premiers membres; — enfin, ils devraient se composer de lettres non accentuées, X, Y, Z, ou bien A, B, C.

### Systèmes de 4 équations analogues.

969. Dans les systèmes de 4 *équations analogues* à 4 inconnues, différentes questions relatives aux notations peuvent être posées. Quels noms donner aux inconnues? Comment écrire les expressions où elles figurent? Par quels symboles représenter ces expressions? Dans quel ordre enfin écrire les 4 équations?

970. Trois des inconnues seront toujours représentées par $x$, $y$, $z$. La quatrième devrait l'être par $v$; et ces 4 lettres devraient être

prises dans l'ordre $xyz$. On associe le plus souvent, aux 3 lettres $x$, $y$, $z$, la lettre $u$ ou la lettre $t$, en la plaçant tantôt à la première place, tantôt à la dernière.

971. Dans le système

$$\begin{aligned} y + z + u - x &= a, \\ z + u + x - y &= b, \\ u + x + y - z &= c, \\ x + y + z - u &= d, \end{aligned}$$

on a nommé les inconnues $x$, $y$, $z$, $u$, et on les a prises dans cet ordre. Étant admise cette façon d'opérer, les 4 premiers membres sont bien écrits, bien nommés, et les 4 équations se succèdent dans l'ordre le plus rationnel.

Dans le système

$$\begin{aligned} -x + y + z + t &= d, \\ x - y + z + t &= c, \\ x + y - z + t &= b, \\ x + y + z - t &= a, \end{aligned}$$

les inconnues sont $x$, $y$, $z$, $t$; les premiers membres correspondent respectivement à ces inconnues; ils devraient donc se nommer $a$, $b$, $c$, $d$, dans cet ordre; en réalité, ils se nomment $d$, $c$, $b$, $a$ : ils sont mal nommés.

972. Considérons le système

$$\begin{aligned} ax + b(y + z + t) &= k, \\ a'y + b'(z + t + x) &= k', \\ a''z + b''(t + x + y) &= k'', \\ a'''t + b'''(x + y + z) &= k''', \end{aligned}$$

où les inconnues s'appellent encore $x$, $y$, $z$, $t$. Il suffirait d'y donner un accent de plus à chacune des lettres $a$, $b$, $k$, pour en rendre les notations irréprochables.

Les inconnues étant désignées par $t$, $x$, $y$, $z$, et $t$ étant la première, le système

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ y + z + t &= b, \\ z + t + x &= c, \\ t + x + y &= d \end{aligned}$$

est très bien écrit. — On peut remarquer que ses premiers membres se composent des combinaisons 3 à 3 des 4 inconnues, qu'ils correspondent par conséquent aux inconnues $t$, $x$, $y$, $z$ et sont très bien représentés par $a$, $b$, $c$, $d$.

973. On trouve dans Euler le système

$$u - \frac{x}{a} = n,$$

$$x - \frac{y}{b} = n,$$

$$y - \frac{z}{c} = n,$$

$$z + \frac{u}{d} = n,$$

dont les équations sont analogues et se déduisent les unes des autres par *permutations tournantes*. Les inconnues en sont $u$, $x$, $y$, $z$, mais $u$ peut être regardé à volonté comme la première ou la dernière. L'ordre où les équations se succèdent est évidemment déterminé; mais les noms à donner aux premiers membres ne pourraient se former qu'à l'aide de signes doubles. Heureusement, on n'a pas à les former, ces premiers membres étant tous égaux à un même nombre $n$.

### Systèmes de $n$ équations.

974. Dans son mémorable travail sur les équations linéaires, Cramer [1] écrit un système de $n$ équations du premier degré à $n$ inconnues sous la forme

$$\begin{aligned}
A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \ldots \\
A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \ldots \\
A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \ldots \\
A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

où les coefficients Z, Y, X, V, etc., nous présentent leurs indices placés à droite et en haut. Ce qu'il y faut surtout remarquer, c'est que tous les coefficients sont affectés d'indices, ceux de la première

---

[1] *Analyse des courbes algébriques*, in-4°, Genève, 1750, appendice I, p. 657.

équation comme ceux des suivantes. Grâce à cette précaution, les termes qui composent les expressions des inconnues nous présentent chacun simultanément une permutation des coefficients et une permutation des indices. C'est l'observation de ces permutations qui a conduit Cramer à la notion des *inversions* ou *dérangements* et aux *formules générales* qui portent son nom.

975. Malgré l'exemple précédent, dès que le nombre des inconnues dépasse 4 ou 5, ces inconnues ne peuvent plus guère être représentées par des lettres différentes. On les représente à l'aide d'une lettre unique, $x$ par exemple, affectée successivement, si leur nombre est $n$, des *indices* 1, 2, 3, ..., $n$.

976. Les $n$ équations

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= a_1,\\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 &= a_2,\\
x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \ldots + nx_2 &= a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} &= a_n
\end{aligned}
$$

se déduisent les unes des autres par permutations circulaires des indices ; elles se suivent dans l'ordre marqué par ce mode de déduction. Caractérisées par celle des inconnues qui présente le coefficient 1, elles ont des seconds membres qui correspondent précisément à cette inconnue. Ce sont des équations bien écrites.

Il en est de même de celles qui forment ce nouveau système :

$$
\begin{aligned}
&x_1(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + 1.2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = 9a^2,\\
&x_2(x_3 + x_4 + \ldots + x_1) + 2.3(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = 25a^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + n(n+1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = (2n+1)^2a^2.
\end{aligned}
$$

Chacune est bien écrite, et toutes ensemble se succèdent dans un ordre rationnel.

Dans le système linéaire

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n &= k_1,\\
b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots + b_nx_n &= k_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \ldots + n_nx_n &= k_n,
\end{aligned}
$$

les seconds membres ne sont pas bons. Ils devraient être remplacés par A, B, ..., N. — Les premiers seraient excellents, n'était la dernière ligne, où l'on a eu tort d'appeler les coefficients $n_1$, $n_2$, $n_3$, ..., $n_n$. — Quant aux nombres qui, substitués à $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$, vérifient à la fois toutes ces équations, c'est-à-dire aux nombres qui constituent la solution du système, ce serait une grosse faute de les appeler $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ..., $\alpha_n$. Ils sembleraient, en effet, par cette notation, avoir avec les coefficients $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$ de la première équation une relation, une correspondance particulière.

977. Pour étudier *l'élimination* de $n$ inconnues entre $n+1$ équations, un auteur appelle ces $n$ inconnues $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, et écrit le système de ces $n+1$ équations sous la forme

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\\
&\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\\
&\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,
\end{aligned}$$

où l'indice zéro donne à la première une importance spéciale. Cette notation est justifiée, non pas par la nature du problème, mais par le mode de raisonnement de l'auteur. C'est dans cette première équation, en effet, qu'il suppose substitués les éléments d'une solution quelconque du système des $n$ suivantes. — Ce système de $n$ équations à $n$ inconnues n'étant pas linéaire admet plusieurs solutions; l'auteur les distingue les unes des autres en leur assignant des numéros ou rangs; il désigne les éléments de la solution de rang $i$ par $r_{i,1}$, $r_{i,2}$, ..., $r_{i,n}$ : c'est une bonne notation.

### Systèmes d'équations quelconques.

978. Les systèmes si variés que nous venons d'examiner étaient formés chacun d'équations toutes analogues. Lorsqu'un système est formé d'équations qui ne se ressemblent point, il peut évidemment *se scinder* en plusieurs systèmes pareils aux précédents.

Il paraît donc inutile de donner des exemples de systèmes com-

posés ainsi d'équations de différentes sortes. De tels exemples se trouveront, d'ailleurs, en bon nombre, dans les derniers Chapitres du présent Ouvrage.

### Abréviations dans les systèmes.

979. Quels que soient les systèmes d'équations considérés, les notations abrégées qu'on y peut employer sont de deux espèces : les unes abrègent l'écriture des équations prises *isolément;* les autres, l'écriture du *système tout entier*.

980. Dans l'étude de l'élément linéaire des surfaces, on rencontre le système

$$E = \sum x_u^2, \qquad F = \sum x_u x_v, \qquad G = \sum x_v^2,$$

où chaque équation est écrite en abrégé.

Les coordonnées du centre de gravité d'un système de points pesants sont données par les équations

$$x = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}, \qquad y = \frac{\sum p_i y_i}{\sum p_i}, \qquad z = \frac{\sum p_i z_i}{\sum p_i},$$

qui sont écrites de la même manière.

La Mécanique nous présente encore, écrit de cette même façon, le système

$$X = \sum X_i, \qquad Y = \sum Y_i, \qquad Z = \sum Z_i,$$

qui nous donne la résultante de plusieurs forces appliquées au même point; et les deux systèmes de trois équations chacun

$$\sum X_i = 0, \qquad \sum Y_i = 0, \qquad \sum Z_i:$$

$$\sum L_i = 0, \qquad \sum M_i = 0, \qquad \sum N_i = 0:$$

qui composent, ensemble, ce qu'on appelle les *équations d'équilibre* d'un système quelconque de forces appliquées arbitrairement à un corps solide.

981. On pourrait citer encore comme systèmes écrits ainsi : le système

$$X = \sum \frac{m(x-a)}{r^3}, \qquad Y = \sum \frac{m(y-b)}{r^3}, \qquad Z = \sum \frac{m(z-c)}{r^3},$$

qui donne les composantes de l'attraction exercée sur un point unique par un certain nombre de *points donnés ;* — et le système

$$X = \int \frac{x-a}{r^3}\,\mu dV, \qquad Y = \int \frac{y-b}{r^3}\,\mu dV, \qquad Z = \int \frac{z-c}{r^3}\,\mu dV,$$

qui donne les composantes de l'attraction exercée sur un point unique par un *corps quelconque supposé continu.*

982. On emploie très souvent des notations permettant de remplacer par une équation unique un système entier d'équations.

C'est ce que l'on fait : lorsqu'on représente un système de $n$ équations différentielles par la seule équation (¹)

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

lorsque l'on exprime par l'équation unique (²)

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i},$$

l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$$

soit une différentielle totale exacte.

983. Lamé, qui fut, dans l'Algèbre et l'Analyse, un écrivain hors de pair, a fréquemment eu recours, pour les équations et groupes d'équations, à des abréviations de cette sorte. Dans ses leçons *Sur les coordonnées curvilignes,* il emploie constamment,

---

(¹) Émile Picard, *Traité d'Analyse,* in-8, t. III, 1894, p. 185.

(²) H. Laurent, *Remarques sur les conditions d'intégrabilité* (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. VI, juin 1887).

d'une façon systématique, les abréviations définies par les conventions suivantes :

*La lettre* $\S$, *placée devant une expression contenant* $u$, *indique la somme de* 3 *expressions semblables, dans lesquelles* $u$ *est successivement remplacé par* $x, y, z$;

*La lettre* $\sum$, *placée devant une expression contenant l'indice* $i$, *représente la somme de* 3 *expressions semblables, dans lesquelles l'indice* $i$ *est successivement supprimé, égal à* 1, *égal à* 2;

*Lorsque deux lettres* $u$ *et* $v$ *existent dans une expression précédée du signe* $\sum$, *elles désignent deux coordonnées quelconques,* $x, y, z$, *mais différant l'une de l'autre;*

*Lorsque les indices* $i$ *et* $j$ *existent dans une expression précédée du signe* $\S$, *ils désignent deux quelconques des indices* 0, 1, 2, *mais différant l'un de l'autre;*

*Le nombre placé à la suite d'une formule exprimée, soit en* $u$ *et* $v$, *soit en* $i$ *et* $j$, *soit à l'aide du signe* $\S$ *ou* $\sum$, *indique le nombre total des formules qu'elle remplace, ou qu'on en déduirait, en donnant successivement aux* $u$, $v$, *aux* $i$, $j$, *toutes leurs valeurs* [1].

Évidemment, au lieu des indices 0, 1, 2, il eût mieux valu employer les indices 1, 2, 3; mais, abstraction faite de cette faute, ces conventions sont excellentes. Elles ont permis à leur auteur : de diminuer considérablement son texte; — de réduire les formules au niveau du format adopté; — de donner, en un mot, d'un bout à l'autre de son Livre, à tout l'ensemble des écritures mathématiques, un degré d'élégance qu'il serait difficile de surpasser.

---

[1] *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, in-8°, Paris, 1859, p. 8-9.

# CHAPITRE IX.

## NOTATIONS INITIALES DES PROBLÈMES.

### Classification objective, subjective.

984. Ce qui domine tout dans le choix des signes représentant les objets, c'est la *classification* des objets à représenter. Cette classification est, d'ailleurs, *objective* ou *subjective*. Objective, lorsque nous considérons les objets en eux-mêmes, dans leur nature propre; subjective, lorsque nous les considérons par rapport à la connaissance que nous avons d'eux, à la manière dont nous les employons.

La distinction des 6 éléments d'un triangle en 2 groupes, les 3 côtés, les 3 angles est évidemment *objective;* — la distinction des quantités en données et inconnues, en constantes et variables est, au contraire, *subjective*.

Si l'on peut, dans le choix des signes, tenir compte simultanément de ces deux genres de considérations, on a raison de le faire. Si ces deux modes sont incompatibles, c'est la classification objective qui doit être préférée.

985. Soit à calculer, dans un triangle, un côté, connaissant les deux autres et l'angle qu'ils comprennent; on se servira des notations consacrées, c'est-à-dire qu'on calculera $a$, par exemple, en fonction de $b$, $c$, A. On n'appellera point $x$ le côté inconnu : si on le faisait, les 3 côtés, qui sont 3 objets analogues, seraient représentés par les signes $x$, $b$, $c$, qui ne le sont point.

986. En général, lorsque l'ensemble des objets sur lesquels porte le problème possède un système de signes consacré par l'usage, il est fort avantageux de s'en tenir aux signes de ce système, sans se

mettre en peine de leur en substituer de nouveaux. Considérons ce problème : « *Au bout de combien d'années un capital donné,* » *placé à intérêts composés à un taux connu, acquiert-il une* » *valeur déterminée?* » — Pour le résoudre, on partira de la formule classique

$$A = a(1 + r)^n,$$

et l'on calculera $n$, qu'on se gardera bien d'appeler $x$.

987. Sauf dans les cas analogues aux précédents, les inconnues et les variables se désigneront par les dernières lettres $x$, $y$, $z$ de l'alphabet; les données et les constantes, par les premières $a$, $b$, $c$. — Si les unes ou les autres sont en grand nombre, on aura recours à des suites de lettres affectées d'indices ou d'accents; ces suites se partageant, s'il le faut, elles-mêmes en différents groupes, correspondant aux différentes sortes des objets à représenter.

### Notations des inconnues.

988. Dans les problèmes où les inconnues sont des nombres, l'énoncé indique de lui-même combien il y a de ces inconnues. On n'a qu'à leur donner des noms, qu'à les désigner soit par des lettres différentes, soit par des lettres affectées d'indices ou d'accents.

989. Considérons ce problème : « *Trouver deux nombres, con-* » *naissant leur somme et la somme de leurs cubes.* » — Les deux nombres cherchés sont deux inconnues analogues; on les représentera par $x$ et $y$ qui sont deux signes analogues.

Considérons ce nouveau problème : « *Trouver trois nombres en* » *progression géométrique, connaissant leur somme et la diffé-* » *rence des deux extrêmes.* » — Il est évident que l'inconnue du milieu joue un rôle spécial : on la désignera par $z$, les deux autres s'appelant $u$ et $v$.

Considérons ce problème encore : « *Calculer les trois côtés* » *d'un triangle rectangle, connaissant la somme des deux côtés* » *de l'angle droit, ainsi que la hauteur.* » Il y a ici 3 inconnues, qui sont les 3 côtés; mais l'hypoténuse joue un rôle spécial :

on la désignera par $z$, et l'on appellera $u$ et $v$ les deux côtés de l'angle droit. Ce sont les notations du problème précédent.

990. Dans les problèmes de Géométrie, lorsque les inconnues sont des quantités, on procède comme on vient de le faire. Toutefois, pour l'homogénéité, il importe de tenir compte, dans les notations, du degré *géométrique* de chaque inconnue.

Si l'inconnue est une *aire,* on la pourra désigner par $x^2$, ou par $ax$, en appelant $a$ une longueur connue, prise à volonté. — Si l'inconnue est un *volume,* on pourra la désigner par $x^3$, ou par $ax^2$, ou par $a^2x$, ou même par $abx$, les lettres $a$ et $b$ représentant encore des longueurs que l'on se donnera.

### Diminution du nombre des inconnues.

991. Dans les problèmes, soit d'Algèbre, soit de Géométrie, qui se résolvent par le calcul, on cherche quelquefois à *diminuer* le nombre des inconnues. Cette diminution, qui n'est souvent qu'apparente, est rarement indispensable. Elle a fréquemment des avantages, mais parfois des inconvénients.

992. Deux inconnues $x$ et $y$ ayant la somme connue $2a$ et entrant symétriquement dans une question, si l'on supprime $y$ pour le remplacer par $2a - x$, on diminue le nombre des inconnues; mais cette diminution est fautive, puisqu'elle détruit la *symétrie*. — Au contraire, si l'on remplaçait ces mêmes inconnues $x$ et $y$ respectivement par $a + z$ et $a - z$, le nombre des inconnues serait encore diminué, mais la *symétrie* ne subirait nulle atteinte : cette diminution serait avantageuse.

Il en serait de même si, l'excès de $x$ sur $y$ étant $2b$, on remplaçait $x$ par $z + b$ et $y$ par $z - b$.

993. Supposons que 3 inconnues soient en progression arithmétique; nous pourrons les désigner par

$$x - z, \quad x, \quad x + z.$$

Supposons que 4 inconnues soient en progression géométrique; nous pourrons les écrire

$$x^3, \quad x^2y, \quad xy^2, \quad y^3.$$

Supposons enfin qu'il s'agisse de calculer 5 nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme et celle de leurs carrés : nous pourrons appeler le nombre du milieu $u$ et la raison $z$.

Il est évident que, dans chacun de ces trois exemples, et sans qu'il y ait la moindre faute, le nombre des inconnues se trouve réduit à 2.

994. Si des inconnues, en nombre quelconque, étaient directement proportionnelles aux nombres donnés $a$, $b$, $c$, ..., rien n'empêcherait de les désigner respectivement par $a\lambda$, $b\lambda$, $c\lambda$, .... Le nombre $\lambda$ serait alors une inconnue nouvelle, dite *inconnue auxiliaire,* dont l'introduction n'aurait que des avantages. — Nous verrons plus tard que les calculs, lorsqu'ils sont bien dirigés, indiquent d'eux-mêmes les cas où les inconnues auxiliaires sont avantageuses et la manière dont il les faut choisir.

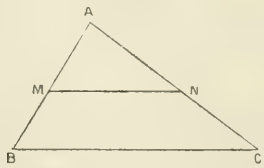
### Choix de l'inconnue.

995. Dans la plupart des problèmes de Géométrie, surtout dans les problèmes dits de *construction,* l'énoncé n'indique pas explicitement quelles sont les inconnues. Il faut les choisir avec grand soin, car le plus ou moins de difficulté du calcul dépend principalement du choix qu'on aura fait.

996. Il peut arriver que ce choix ne nécessite aucun effort et que la quantité à prendre comme inconnue s'offre à nous d'elle-même. C'est ce qui arrive dans les deux exemples suivants.

*Étant donné le triangle* ABC, *on demande de mener, dans l'angle* A, *une parallèle au côté* BC *qui ait une longueur donnée* $k$.

Fig. 7.



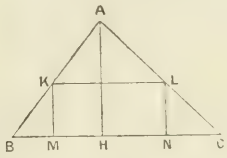

Soit MN cette parallèle. On prendra pour inconnue la longueur AM

que l'on désignera par $x$, et l'on aura immédiatement pour déterminer $x$ la proportion

$$\frac{x}{c} = \frac{k}{a}.$$

*Soit à inscrire, dans le triangle* ABC, *un rectangle* KLMN *ayant un périmètre donné* $2\pi$. On prendra pour inconnue la

Fig. 8.




hauteur KM que l'on désignera par $x$ et, appelant $h$ la hauteur AH du triangle, on aura la proportion

$$\frac{h-x}{h} = \frac{\pi - x}{a}.$$

997. Si le problème présente une symétrie, il ne faudra point que le choix de l'inconnue la détruise. « *Soient* A *et* B *deux points* » *lumineux, placés sur une droite indéfinie, et éclairant, à* » *l'unité de distance, avec les intensités a et b; on demande le* » *point* I *de cette droite qui est également éclairé par les points* » *lumineux.* » — Il ne faudra pas prendre pour inconnue la distance de I à A plutôt qu'à B, ni réciproquement. On marquera sur la droite indéfinie une origine quelconque O; on appellera $\alpha$ et $\beta$ les distances positives ou négatives de cette origine aux deux points A et B; $x$ sa distance au point cherché I, et l'on aura alors l'équation

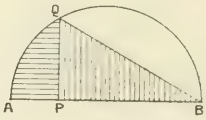
$$\frac{a}{(x-\alpha)^2} = \frac{b}{(x-\beta)^2},$$

équation du second degré, qui est *symétrique* en $a$ et $b$, en $\alpha$ et $\beta$.

998. Supposons que l'examen d'un problème en fasse *a priori* connaître une solution. Il faudra choisir l'inconnue de telle sorte que cette solution soit en évidence sur l'équation finale.

*Étant donné le demi-cercle* AQB, *on demande de mener une perpendiculaire* PQ *au diamètre* AB, *de telle sorte que les volumes engendrés, dans leur rotation autour de* AB, *par le triangle mixtiligne* APQ *et le triangle rectiligne* PQB *soient*

Fig. 9.




*égaux entre eux*. Il est évident que ces volumes sont égaux lorsque le point P est en A, puisqu'alors ils sont tous les deux nuls. On prendra pour inconnue $x$ la longueur AP ; l'équation finale admettra la racine zéro; son degré s'abaissera d'une unité.

999. On peut voir le plus souvent, sur la figure du problème, quel sera le *degré* de l'équation donnant la valeur de l'inconnue. Ce degré variera suivant que l'on prendra telle inconnue ou telle autre. L'inconnue la plus avantageuse sera celle qui conduira au moindre degré.

Les exemples abondent. Il n'en est pas de plus instructif que le problème, dit *problème de Pappus* (¹), dont voici l'énoncé : *Étant données deux droites rectangulaires indéfinies, mener par un point donné* C, *équidistant de ces deux droites, une sécante telle que la partie interceptée entre elles ait une longueur donnée.* — Il est facile de voir que ce problème admet 4 solutions, dont 2 au moins sont toujours réelles.— Si l'on prend pour inconnues les distances du sommet O de l'angle droit aux points où la sécante cherchée coupe les deux côtés de cet angle, chacune de ces inconnues peut prendre 4 valeurs différentes, et se détermine, par conséquent, à l'aide d'une équation du 4ᵉ degré. — Si l'on considère la distance du point C au milieu du segment de la sécante cherchée, compris entre les deux côtés de l'angle, il est bien clair que cette distance ne peut prendre que 2 valeurs différentes : choisie pour

(¹) 385 ap. J.-C.

inconnue, elle sera donc donnée par une équation du second degré seulement.

Ce problème justement célèbre de Pappus a été résolu par des méthodes très diverses; un Ouvrage récent [1] en expose jusqu'à sept. Deux ont été données par Newton dans son *Arithmétique universelle,* dont le premier Volume est un admirable recueil de problèmes.

### Coordonnées polaires et bipolaires.

1000. En dehors du système des coordonnées cartésiennes, il existe un certain nombre de systèmes de coordonnées qui peuvent, dans certains cas, être employés avec avantage. Telles sont, principalement, les coordonnées *polaires* et les coordonnées *bipolaires*.

1001. Les coordonnées *bipolaires* sont caractérisées par l'emploi de deux pôles ou origines fixes, A et B. Elles sont de deux sortes, car un point quelconque M du plan peut être déterminé soit par ses *distances,* $u$ et $v$, à ces deux pôles, soit par les *angles,* $\alpha$ et $\beta$, que les droites MA, MB font respectivement avec AB et BA.

Lorsque la définition d'un *lieu géométrique* nous présente 2 points fixes, et 2 seulement, l'emploi des coordonnées bipolaires est tout indiqué; et l'on n'a plus qu'à choisir celles de la première ou celles de la seconde sorte, suivant qu'un point quelconque est déterminé par 2 distances ou 2 angles.

C'est le système où l'on se sert des distances qu'il faudrait employer pour l'ellipse et pour l'hyperbole, lorsqu'on les définit à l'aide de leurs foyers. — C'est lui qu'il faudrait employer aussi pour les lignes où l'on assujettit à être constante soit une fonction linéaire quelconque des longueurs $u$ et $v$, soit une fonction du second degré de ces mêmes longueurs, par exemple leur produit ou la somme de leurs carrés. On écrirait alors immédiatement

$$mu + nv = k, \qquad uv = k^2, \qquad u^2 + v^2 = k^2;$$

et ces différentes équations ne seraient respectivement que les traductions exactes des définitions ci-dessus.

---

[1] DESBOVES, *Questions d'Algèbre élémentaire,* in-8°, Paris, 1873, p. 318.

1002. Les coordonnées *simplement polaires* déterminent chaque point par un *rayon* $\rho$ et un *angle* $\omega$, l'origine de ce rayon étant un point fixe appelé *pôle,* et le premier côté de cet angle, une droite fixe appelée *axe polaire.*

Ces coordonnées conviennent surtout aux cas où les lieux considérés utilisent, dans leur définition géométrique, une droite mobile, passant constamment par un point fixe. — Pour étudier les différentes spirales, le limaçon de Pascal, la conchoïde de Nicomède, on se servira des coordonnées polaires. — On s'en servira aussi pour résoudre ce problème : *Trouver les trajectoires du faisceau des droites issues d'un point fixe donné.*

1003. On peut appeler *transformation centrale* toute transformation géométrique dans laquelle la droite menée par deux points homologues quelconques $M_1$, $M_2$ passe constamment par un point fixe O appelé *pôle* ou *centre* de transformation.

L'emploi des coordonnées polaires ayant O pour pôle permet d'écrire immédiatement la loi de la transformation. — Si l'on appelle $\rho_1$, $\rho_2$ les rayons vecteurs des deux points homologues $M_1$, $M_2$, l'*homothétie* s'exprimera par la relation

$$k_1\rho_1 = k_2\rho_2,$$

où $k_1$ et $k_2$ désignent des nombres. — La transformation qui donne les *conchoïdes* s'exprimera par

$$\rho_2 - \rho_1 = k.$$

Et l'équation

$$\rho_1\rho_2 = k^2,$$

définira la transformation par *rayons vecteurs réciproques.*

### Coordonnées cartésiennes dans le plan.

1004. Lorsque l'on veut, dans le plan, employer des coordonnées *cartésiennes,* il en faut tout d'abord choisir l'origine. Si, dans la figure que l'on considère, un point joue un rôle considérable, n'appartenant qu'à lui seul, c'est ce point que l'on choisira. On prendra donc, pour origine des coordonnées cartésiennes, chacun des points

que nous avons pris, dans notre avant-dernier paragraphe (1002), comme pôle des coordonnées polaires.

Si la figure possède soit un centre, soit un foyer unique, soit un point multiple, unique aussi, on prendra encore ce point pour origine. — Le choix du point multiple est surtout avantageux lorsqu'on représente le lieu cherché sous forme paramétrique.

D'ailleurs, comme les calculs relatifs à la forme d'une courbe en l'un de ses points se simplifient beaucoup quand ce point est à l'origine, on fera bien, lorsqu'on voudra étudier minutieusement une courbe autour d'un de ses points, de prendre ce point pour origine et, pour axes des coordonnées, la tangente et la normale à cette courbe, en ce point.

1005. Ce sont les considérations de *symétrie* qui doivent surtout nous guider dans le choix des axes de coordonnées. — Supposons qu'il se trouve parmi les données de la question *deux points,* et deux seulement, jouant absolument le même rôle, comme cela arrive quand on cherche l'équation cartésienne d'une ellipse définie par ses foyers; nous prendrons, pour axe des $x$, la droite indéfinie passant par ces deux points et, pour axe des $y$, la perpendiculaire élevée sur cette droite, au milieu de la distance qui les sépare. Il serait très mauvais de prendre l'un de ces points pour origine.

Mais, pour opérer comme nous venons de le faire, il faut que les deux points jouent le même rôle absolument. — Considérons deux cercles et cherchons leur *axe radical,* c'est-à-dire le lieu des points d'égales puissances par rapport à eux. On choisira pour axe des $x$ la ligne des centres de ces cercles; mais on prendra pour origine un point quelconque de cette droite, non lié aux données. Il serait mauvais de prendre l'un des deux centres. Quant au milieu de leur distance, on ne pourrait y placer l'origine que si les deux cercles étaient égaux.

1006. Si la figure que l'on étudie possède *un axe de symétrie,* on prendra cette droite pour l'un des axes de coordonnées, par exemple pour l'axe des $x$ : le second axe devrait lui être perpendiculaire. — Si la figure nous présentait *deux axes de symétrie* perpendiculaires entre eux, il les faudrait prendre pour axes de coordonnées. — Mais si elle en possédait *plusieurs,* passant tous

par le même point, il conviendrait de revenir aux coordonnées *polaires* ayant ce point pour *pôle*.

Il existe parfois, pour la figure, ce qu'on pourrait appeler une *symétrie penchée*. C'est ce qui arrive lorsque la figure nous offre une droite qui est le diamètre des cordes parallèles à une certaine direction oblique. Cette droite devra être prise pour l'un des axes de coordonnées et l'autre axe devra être parallèle aux cordes considérées. Ces deux axes seront alors obliques; mais il n'en résultera d'inconvénients que si la question exige qu'on exprime dans les calculs des angles ou des distances.

Soit dans la symétrie parfaite, soit dans la symétrie penchée, dès que les axes sont choisis comme nous venons de l'indiquer, l'équation du lieu se simplifie beaucoup. Dès que l'axe de symétrie ou le diamètre considéré est pris pour axe des $x$, l'équation, supposée algébrique, ne contient plus que des puissances paires de $y$.

1007. Lorsque, dans une question de Géométrie analytique, *deux droites concourantes* jouent le même rôle, il est bon de les prendre pour *axes de coordonnées :* c'est, par exemple, ce qu'il convient de faire, et ce que l'on fait presque toujours, quand on étudie les coniques inscrites dans un angle. — Si l'on tenait à avoir des axes de coordonnées *rectangulaires,* on pourrait prendre pour ces axes les *bissectrices* des angles formés par les deux droites concourantes données.

### Noyau polygonal.

1008. En coordonnées cartésiennes, le choix des axes revient à celui de deux droites concourantes. Il s'ensuit que nous ne disposons, dans cette opération, que de deux indéterminées et, par conséquent, que nous ne pouvons choisir des axes convenant parfaitement aux figures données que dans le cas où ces figures contiennent seulement deux éléments analogues.

Certaines figures toutefois, qui en contiennent un plus grand nombre, peuvent être rapportées à des axes de coordonnées qui leur soient en quelque sorte adéquats. Le parallélogramme, par exemple, peut être rapporté soit à ses diagonales, soit aux parallèles à ses côtés menées par son centre. Mais c'est là un cas tout à fait

exceptionnel. Dès que la figure nous présente plus de deux éléments analogues, nous ne pouvons, en général, faire un bon choix de coordonnées cartésiennes.

1009. Considérons le cas le plus simple, celui où la figure nous présente *trois éléments* de même sorte. Soient, par exemple, 3 points non en ligne droite, jouant le même rôle. Si l'on prend l'un d'eux pour origine, on le traite d'une façon particulière; si l'on prend pour axe des $x$ la droite qui passe par deux d'entre eux, ces deux points sont en quelque sorte avantagés. — De même, si la figure nous présente 3 droites analogues, il n'en faut prendre ni une ni deux pour axes de coordonnées. On peut citer un très bon Ouvrage où, les 3 côtés d'un triangle jouant tout à fait le même rôle, l'auteur en choisit deux pour axes. Ce choix est évidemment très mauvais.

Comment donc choisir les deux axes dans le cas général de $n$ *points analogues?* En les prenant absolument quelconques, c'est-à-dire en les prenant de telle sorte qu'aucun des deux ne passe par l'un des points donnés, ni ne soit parallèle à la droite qui joint deux d'entre eux. On appellera les points $1, 2, \ldots, n$; leurs coordonnées $x_1y_1$, $x_2y_2$, ..., $x_ny_n$. — Il sera souvent avantageux de prendre pour origine le *centre de gravité* du système des $n$ points donnés, considérés comme $n$ poids égaux.

Dans le cas de $n$ *droites analogues,* on opérerait de même, ayant grand soin de ne prendre, pour axe des $x$ ou des $y$, aucune des droites données, ni aucune des parallèles à ces droites.

1010. Cette manière de choisir les deux axes de coordonnées répond à la question d'une façon en quelque sorte négative. Pour y répondre mieux, il faudra abandonner les coordonnées *suffisantes* de Descartes, et avoir recours aux coordonnées *surabondantes* de Bobillier (302).

Supposons que la figure étudiée possède un *noyau polygonal,* c'est-à-dire un système de $n$ droites fixes, y jouant toutes le même rôle. On la rapportera à ce système; chaque droite sera regardée comme un axe, et chaque point du plan sera déterminé par ses distances à ces $n$ axes. Chaque point possédera ainsi $n$ coordonnées; ces $n$ coordonnées ne seront point indépendantes les unes des

autres; dès que deux d'entre elles seront connues, toutes les autres s'en déduiront; mais il importe de les conserver toutes dans les équations, afin que les $n$ droites données soient toutes traitées de même. — Ce sont là, nous le répétons, des coordonnées surabondantes, tout à fait en rapport avec le système des $n$ droites données.

Les coordonnées trilinéaires, si fréquemment employées, nous en offrent le premier exemple. Le noyau de la figure est alors un triangle; mais il peut être un quadrilatère, un pentagone, ..., un polygone de $n$ côtés. Ce polygone, quel qu'il soit, sera le polygone de référence.

### Coordonnées dans l'espace.

1011. On retrouve, dans la Géométrie analytique à 3 dimensions, des systèmes de coordonnées presque identiques à ceux de la Géométrie plane. — D'abord le système *tripolaire*, où un point quelconque est déterminé par ses distances à 3 points fixes : il est surtout à employer lorsque la question nous présente 3 points fixes jouant tout à fait le même rôle. — Ensuite le système *simplement polaire*, où l'on prend pour coordonnées une longueur, dite *rayon vecteur*, et deux angles, l'azimut et la distance zénithale : ce système est surtout avantageux pour les surfaces de révolution, car si l'on prend pour pôle un point de leur axe, et pour distance zénithale $\zeta$ l'angle du rayon vecteur $\rho$ avec cet axe, l'équation de la surface se réduit à une relation entre $\rho$ et $\zeta$. — Enfin les coordonnées *rectilignes ou cartésiennes*, rectangulaires ou obliques, qui sont de beaucoup les plus employées.

1012. Il est des cas où le choix de l'origine et des 3 axes de coordonnées est tout indiqué par l'usage. — Pour étudier une *surface* autour d'un de *ses points*, on prend ce point pour origine; la normale qui y passe pour axe des $z$; le plan tangent en ce point pour plan des $xy$. — Pour étudier une *courbe gauche* en un *point*, on prend encore ce point pour origine, et l'on choisit, pour trièdre des coordonnées, le trièdre trirectangle ayant pour arêtes : la tangente, la normale principale et la binormale.

1013. Si la figure donnée nous offre un *plan de symétrie* ou un

*plan diamétral,* il conviendra de prendre ce plan pour l'un des plans coordonnés. — Si elle nous offre 3 *droites* jouant le même rôle et formant un trièdre, on prendra ces 3 droites pour axes des $x$, des $y$ et des $z$.

Lorsque la figure nous présente un *parallélépipède* dont tous les éléments sont analogues, il convient de prendre pour origine le centre de ce parallélépipède et, pour axes, des parallèles aux 3 directions des arêtes. C'est ce que l'on fait quand on cherche l'équation de l'hyperboloïde à une nappe donné par 3 génératrices d'un même système, en partant du parallélépipède déterminé par ces 3 génératrices.

1014. Mais, dans les coordonnées *cartésiennes,* nous ne pouvons choisir à notre gré que 3 droites concourantes. Il nous est donc, en général, impossible de trouver des coordonnées de cette sorte parfaitement appropriées aux différents problèmes. Supposons qu'on ait à étudier une figure nous présentant 4 points, non situés dans un même plan, mais tout à fait analogues. On ne pourra, sans détruire cette parfaite analogie : ni prendre pour origine un de ces 4 points; ni prendre pour l'un des axes la droite qui passe par deux d'entre eux ; ni prendre pour l'un des plans de coordonnées le plan qui en contient trois. — *A fortiori* un bon choix de coordonnées serait-il impossible, si le nombre des éléments analogues devenait encore plus grand.

Si la figure à étudier nous présentait un grand nombre de points, de droites ou de plans tout à fait analogues, le seul procédé, *négatif* en quelque sorte, de bien choisir les axes consisterait à les prendre quelconques, c'est-à-dire à les prendre tels qu'aucun des éléments donnés n'occupe par rapport à eux une position spéciale et, si j'ose le dire, privilégiée. Mais ce serait là, je le répète, une solution purement *négative*.

1015. Pour en obtenir une *positive,* il conviendra, comme dans le plan, d'avoir recours aux cordonnées *surabondantes,* aux coordonnées *polyédriques*. Supposons que la figure à étudier possède un *noyau polyédrique,* constitué par $n$ plans jouant tous le même rôle. On déterminera chaque point de l'espace par ses distances à ces $n$ plans. Ces distances, il est vrai, ne seront point indépendantes

les unes des autres; mais il sera nécessaire, pour la symétrie, de les traiter toutes de même. L'usage du *polyèdre de référence,* formé par les $n$ plans analogues de la figure, nous permettra ainsi de n'avoir à considérer que des équations, que des expressions toutes symétriques par rapport à ces $n$ plans.

---

# CHAPITRE X.

## MISE EN ÉQUATIONS.

### Quantités intermédiaires.

1016. L'inconnue ou les inconnues du problème ayant reçu des noms, il s'agit de relier par des équations ces inconnues aux données, c'est-à-dire, suivant l'expression consacrée, de *mettre le problème en équations*. Cette opération n'est pas toujours commode. Dans beaucoup de cas, on la facilite grandement par la considération de certaines quantités qui touchent d'une part aux inconnues, de l'autre aux données, qui établissent entre celles-ci et celles-là comme des sortes de ponts, et que nous nommerons *quantités intermédiaires*.

1017. Considérons ce problème :

« *Deux vases, de capacités données a et b, contiennent chacun* » *un mélange d'eau et de vin. Quelle capacité x doivent avoir* » *deux vases égaux pour que, les remplissant à la fois, l'un* » *dans le premier des vases donnés, l'autre dans le second, et* » *versant dans chacun d'eux ce qui a été pris dans l'autre, on* » *obtienne, dans les deux vases, la même proportion d'eau et* » *de vin?* »

On ne voit pas tout d'abord la relation qui existe entre $x$, $a$ et $b$. Mais si l'on prend, comme *intermédiaires*, les quantités $\alpha$ et $\beta$ de vin pur contenues dans les deux vases, on peut écrire assez facilement l'équation du problème. Cette équation est du premier degré; elle ne contient plus ni $\alpha$, ni $\beta$; elle nous donne finalement

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

formule remarquable, qui résout la question.

1018. Le célèbre *problème des bœufs*, qui paraît dû à Newton, peut s'énoncer ainsi :

« *Trois prés ont pour aires respectives* $a'$, $a''$, $a'''$, *et l'herbe,*
» *d'abord de même hauteur dans chacun d'eux, y croît d'un*
» *mouvement uniforme. Le premier pré peut nourrir* $n'$ *bœufs*
» *en* $t'$ *heures; et le deuxième* $n''$ *bœufs en* $t''$ *heures. Combien*
» *le troisième peut-il en nourrir en* $t'''$ *heures?* »

On considère trois quantités *intermédiaires :* la hauteur initiale $h$ de l'herbe dans les trois prés; la vitesse $v$ de sa croissance; la consommation $c$ d'un bœuf en une heure, cette dernière quantité étant évaluée en mètres cubes et les deux précédentes en mètres linéaires. On désignera l'inconnue qui figure dans l'énoncé du problème par $n'''$ et non pas par $x$; et l'on trouvera alors, d'une façon pour ainsi dire immédiate, les trois équations pareilles

$$n' c t' = a' (h + v t'),$$
$$n'' c t'' = a'' (h + v t''),$$
$$n''' c t''' = a''' (h + v t'''),$$

qui correspondent respectivement aux trois prés et qui donneraient l'un quelconque des nombres $n'$, $n''$, $n'''$ en fonction des deux autres.

1019. Parmi les tours de cartes, assez peu nombreux, qui se font uniquement par les nombres, on peut citer celui qui revient à ce problème :

« *Les* 52 *cartes d'un jeu ont été distribuées en tas de telle sorte*
» *que, dans chaque tas, la valeur de la carte placée sous toutes*
» *les autres, ajoutée au nombre de celles-ci, donne toujours le*
» *même total* 13. *Le nombre des tas formés est* $t$, *celui des cartes*
» *restantes est* $r$. *Calculer la somme* V *des valeurs des cartes*
» *placées sous tous les tas, connaissant seulement* $r$ *et* $t$. »

La mise en équations devient très facile, si l'on considère deux séries de quantités intermédiaires, savoir : les valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ des cartes placées sous chaque tas; les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_t$ des cartes qui leur sont superposées. On peut écrire alors les $t$

équations

$$v_1 - n_1 = 13,$$
$$v_2 - n_2 = 13,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$v_t - n_t = 13,$$

lesquelles nous donnent, par addition membres à membres,

$$V = 14t + r - 52,$$

formule qui résout complètement le problème, et ne contient aucune des quantités intermédiaires.

**1020.** Il est toujours bon de tenir compte, pour les notations, des analogies ou différences qui existent entre les quantités intermédiaires, les inconnues et les données. Dans le problème des vases, les quantités intermédiaires sont les quantités de vin pur contenues dans les deux vases; elles correspondent aux capacités $a$ et $b$; aussi les appelons-nous $\alpha$ et $\beta$. — Dans le problème des bœufs, les quantités intermédiaires sont chacune symétriques par rapport aux trois prés : voilà pourquoi leurs noms $h$, $v$, $c$ ne rappellent aucun d'eux. — Dans le problème des cartes, les quantités intermédiaires correspondent aux différents tas et, par conséquent, se correspondent chacune à chacune : les indices dont elles sont affectées peuvent être regardés comme les numéros de ces différents tas.

### Coefficients indéterminés.

**1021.** Les coefficients indéterminés doivent être rapprochés des quantités intermédiaires. Employés systématiquement, ils constituent une méthode de calcul qui est attribuée à Descartes.

**1022.** On en fait fréquemment usage dans l'*élimination*. Soit à tirer du système

$$a'x + b'y + c'z = k',$$
$$a''x + b''y + c''z = k'',$$
$$a'''x + b'''y + c'''z = k'''$$

la valeur de l'inconnue $x$. On ajoute les 3 équations après les avoir

multipliées respectivement par les coefficients indéterminés $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$, puis on annule, dans l'égalité obtenue, le coefficient de $y$ et celui de $z$. On arrive ainsi à deux équations homogènes en $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$; par suite, à des expressions auxquelles ces coefficients sont proportionnels; et finalement à la valeur cherchée de $x$. — D'ailleurs, les coefficients que nous avons nommés $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ n'auraient pu être désignés par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ : ils correspondent, en effet, respectivement aux 3 équations données, et ces équations sont caractérisées par leurs accents.

**1023.** Soit à rendre *maximum* le produit

$$(a-2x)(b-2x)x.$$

On le remplace par le produit

$$\frac{a-2x}{\alpha}\,\frac{b-2x}{\beta}\,\frac{x}{\gamma},$$

qui est maximum en même temps que le précédent, puisque les nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont indéterminés, mais non pas variables. On écrit ensuite : d'une part, que les 3 facteurs considérés ont une somme constante; de l'autre, qu'ils sont égaux. Et l'élimination des 3 indéterminées entre les 3 équations ainsi obtenues conduit à l'équation unique, qui donne la valeur de $x$. — Ces calculs sont ceux auxquels conduit le *problème de la boîte,* lequel consiste à enlever, aux quatre coins d'une feuille de carton rectangulaire, quatre carrés égaux, de façon que le parallélépipède formé par la feuille ainsi découpée ait un volume maximum.

Une foule d'autres questions de maximum ou de minimum se résolvent de même par l'emploi des coefficients indéterminés. Nous pouvons citer celle-ci : « *Parmi tous les cônes de révolution inscrits dans une sphère donnée, quel est celui dont la surface totale est maxima?* »

**1024.** La *décomposition* des fractions rationnelles s'effectue aussi par la méthode des *coefficients indéterminés*. Considérons la fraction

$$\frac{x-1}{(x-1)^3(x^2+x+1)}.$$

Pour la décomposer, nous l'égalerons à la somme

$$\frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

En chassant les dénominateurs, puis identifiant les deux membres, nous pourrons calculer les 5 coefficients indéterminés placés en numérateurs. — On peut remarquer que les notations employées présentement sont celles que l'usage a consacrées.

1025. C'est encore ce procédé qu'on emploierait pour *développer* en *série* entière : soit une fonction explicite donnée, par exemple une fraction algébrique; soit l'intégrale générale d'une équation différentielle ordinaire. Désignant la variable par $x$, on écrirait la série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots;$$

et l'on opérerait par identification.

Dans le cas très fréquent où l'on aurait à considérer, en même temps que la série, une ou plusieurs de ses dérivées successives, il conviendrait de diviser chaque puissance de $x$ par la factorielle correspondante, et de mettre la série inconnue sous cette nouvelle forme

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

la présence des factorielles supprimant les facteurs numériques qui pourraient s'introduire dans la différentiation.

### Paramètres.

1026. La Géométrie pure et la Géométrie analytique font un usage continuel des quantités intermédiaires. On nomme alors ces quantités *paramètres auxiliaires* ou simplement *paramètres*.

1027. Soit à démontrer dans le plan, par la Géométrie pure, qu'une ligne brisée convexe est plus petite que toute ligne enveloppante ayant même origine et même extrémité. Parcourant cette ligne brisée dans un sens déterminé, on en prolonge chaque côté

jusqu'à sa rencontre avec la ligne enveloppante. Les prolongements ainsi tracés sont des quantités *intermédiaires,* qui permettent d'écrire une suite d'inégalités, et finalement disparaissent.

Qu'il s'agisse, d'ailleurs, de démontrer un théorème ou de résoudre un problème, le choix des paramètres peut s'effectuer d'une multitude de manières. Ce choix n'est pas toujours également heureux; mais il est bien évident que c'est de lui que dépend le plus ou moins de simplicité de la démonstration ou de la solution.

**1028.** Dans les problèmes de Géométrie analytique, on se sert aussi fréquemment de *paramètres* auxiliaires.

Supposons qu'on nous demande de former, dans le plan, l'équation de la droite passant par deux points donnés. Nous partirons de l'équation

$$\alpha x + \beta y + \lambda = 0;$$

nous écrirons que cette équation est vérifiée par les coordonnées de chacun des deux points; puis nous éliminerons $\alpha$, $\beta$ et $\lambda$. — Or, que sont les coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\lambda$, sinon des quantités intermédiaires, des *paramètres?*

Supposons maintenant qu'on nous demande les conditions pour qu'un plan donné coupe suivant un cercle une surface du second degré donnée. Nous remplacerons cette surface par son cône asymptotique et ce plan par le plan parallèle mené par l'origine; nous associerons à ce dernier plan un plan nouveau, indéterminé,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0;$$

nous formerons, d'une part, l'équation du système des deux plans associés, de l'autre, celle du système des quadriques passant par l'intersection du cône asymptotique avec la sphère de rayon nul qui a pour centre l'origine. Identifiant ces deux équations à l'aide d'un facteur indéterminé $\lambda$, nous obtiendrons des relations entre lesquelles nous éliminerons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\lambda$, c'est-à-dire les 4 *paramètres* auxiliaires figurant dans la question; et nous obtiendrons ainsi les conditions demandées.

On peut le remarquer, dans les deux questions qui précèdent, en écrivant, à l'aide de paramètres indéterminés, l'équation de la droite ou du plan répondant à la question, nous n'avons fait que

supposer le problème résolu, qu'appliquer en d'autres termes un procédé analytique qui remonte à Platon [1].

### Représentation des courbes planes.

**1029.** Dans l'espace comme sur un plan, une ligne peut être définie : soit d'une façon *géométrique*, par une propriété commune à tous ses points; soit d'une façon *mécanique*, par le mouvement d'une figure. Mais, dans l'un et l'autre cas, les coordonnées du point décrivant sont fonctions d'une *seule variable indépendante*. Si elles paraissaient l'être de $n$, c'est que ces $n$ variables seraient liées entre elles par $n - 1$ équations. Il n'y aurait toujours, en dernière analyse, qu'une variable indépendante unique.

**1030.** Quoi qu'il en soit, toutes ces variables, indépendantes ou non, sont des *quantités intermédiaires* et se nomment *paramètres*. Comment les choisir? En étudiant attentivement la façon dont on détermine le point décrivant.

Supposons que l'on considère une courbe $\Gamma$; la tangente au point M de cette courbe; puis un point I dont la position dépend de cette tangente et, par conséquent, de ce point M. Pour obtenir le lieu du point I, on pourra prendre, comme *paramètres*, les coordonnées du point de contact M.

Lorsque le lieu d'un point est défini par un mouvement, il est très souvent avantageux de prendre pour *paramètre* un *angle*. C'est ce que l'on fait lorsqu'on étudie la cycloïde, l'épicycloïde, etc. : on considère le cercle qui roule sur l'axe ou la circonférence fixe, et l'on prend pour paramètre l'angle dont ce cercle tourne à partir d'une position donnée.

**1031.** Pour obtenir l'équation d'un lieu en coordonnées cartésiennes, on passe souvent par un système de coordonnées plus en rapport avec la définition du lieu. On prend ainsi, dans une première recherche : l'équation de l'ellipse en coordonnées bipolaires; celle

---

[1] Né en 430 av. J.-C., mort en 347.

de la cissoïde en coordonnées polaires ordinaires. Puis, en changeant de coordonnées, on élimine $u$ et $v$, dans le premier cas; $\rho$ et $\omega$, dans le second. Ces premières coordonnées $u$ et $v$, $\rho$ et $\omega$ n'ont été évidemment que des quantités ou *paramètres intermédiaires*.

**1032.** Si le point dont on cherche le lieu est à l'intersection de deux courbes mobiles ayant pour équations

$$\varphi(x, y; \lambda) = 0, \qquad \chi(x, y; \lambda) = 0,$$

et qu'on puisse résoudre, par rapport à $x$ et $y$, le système de ces deux équations, on arrive aux formules

$$x = f(\lambda), \qquad y = g(\lambda),$$

qui constituent une *représentation paramétrique* de la ligne cherchée.

Nous avons déjà vu qu'on nomme, en général, $t$ le paramètre que nous désignons ici par $\lambda$, et qu'on le nomme ainsi parce que $t$ est l'initiale du mot *temps*. — Nos élèves nomment souvent *courbes en t* les courbes ainsi représentées. — On sait qu'on appelle *courbes unicursales* celles où $x$ et $y$ peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles du paramètre.

Il est, d'ailleurs, évident qu'il suffit, dans tous les cas, d'éliminer ce paramètre pour obtenir l'équation qui lie $y$ à $x$, c'est-à-dire l'équation proprement dite du lieu.

**1033.** Une courbe déterminée est susceptible d'une foule de représentations paramétriques, car ces représentations dépendent de la définition qu'on a donnée du lieu et du paramètre qu'on a choisi; mais, par rapport à un système d'axes donné, elle ne comporte qu'une seule équation en $x$, $y$, puisque cette équation ne dépend ni de ce paramètre, ni de cette définition. Les courbes planes sont donc *caractérisées* par leurs *équations respectives*. Ces équations permettent donc de les reconnaître et de les classer. — La *représentation paramétrique* ne nous offre aucun de ces avantages; mais elle en possède un autre, qui est fort appréciable : elle nous donne une facilité très grande pour étudier la courbe, et surtout pour la tracer.

### Courbes gauches et surfaces.

1034. Lorsqu'un point décrit une ligne gauche, comme lorsqu'il décrit une ligne plane, ses 3 coordonnées sont fonctions chacune d'une *variable indépendante unique*, qu'on nomme encore *paramètre*. Mais, pour obtenir ces 3 fonctions, on emploie souvent des paramètres auxiliaires autres que le paramètre final. C'est en éliminant toutes ces quantités intermédiaires que l'on arrive aux 3 relations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t)$$

qui constituent une *représentation paramétrique* de la courbe.

Pour la raison que nous avons dite, le paramètre unique se désigne presque toujours par $t$. Si on l'éliminait à son tour entre les 3 équations qu'on vient d'écrire, on obtiendrait le système des deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0,$$

qui représentent chacune une surface, et qui, prises simultanément, représentent la courbe considérée. Cette courbe nous est alors donnée comme l'intersection de ces deux surfaces.

1035. Tout point d'une *surface* a chacune de ses coordonnées fonction de *deux variables indépendantes* qu'on nomme encore *paramètres*. On les désigne d'habitude par $u$ et $v$, sans doute parce que dans l'alphabet $u$ et $v$ sont les deux lettres qui suivent $t$. Quand on cherche à représenter la surface, on considère souvent d'autres paramètres, qui sont des quantités intermédiaires, mais qui doivent être liés entre eux et avec les premiers par un nombre convenable d'équations. En éliminant les paramètres de cette sorte, on arrive finalement à 3 équations en $x$, $y$, $z$, $u$ et $v$, lesquelles, résolues par rapport à $x$, $y$, $z$, nous donnent, pour la surface considérée, la *représentation paramétrique*

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

D'ailleurs, il suffirait d'éliminer $u$ et $v$ entre ces dernières équations pour obtenir une relation, indépendante de tout paramètre,

entre les coordonnées d'un point quelconque de la surface; pour obtenir, en d'autres termes, l'équation proprement dite de cette surface.

**1036.** Sur le plan, il n'existe qu'un *seul être géométrique :* la *ligne*. Dans l'espace, il en existe *deux :* la *ligne* et la *surface*. Dans l'espace à 4 dimensions, il en existerait 3; dans l'espace à 5 dimensions, il en existerait 4, et ainsi de suite.

Les coordonnées d'un point d'une ligne sont fonctions d'une seule variable indépendante. Celles d'un point d'une surface sont fonctions de deux. Dans les espaces à plus de 3 dimensions, ou, comme on dit, dans les *hyperespaces,* on trouverait des êtres géométriques où les coordonnées de chaque point seraient fonctions de variables indépendantes en nombre supérieur à 2, ou plutôt en nombre quelconque.

### Constantes arbitraires.

**1037.** Supposons qu'une question de Géométrie analytique nous ait conduits à $n$ équations entre les deux variables $x$, $y$ et les $n$ paramètres $a$, $b$, $c$, .... Nous pouvons, entre ces équations, éliminer $n-1$ de ces paramètres, et nous obtenons, par cette élimination, une équation finale unique, ne contenant plus qu'un seul paramètre et affectant, par conséquent, la forme

$$f(x, y; a) = 0.$$

Ce paramètre $a$ est une *constante* qui peut recevoir toutes les valeurs numériques possibles et que l'on nomme, pour cette raison, *constante arbitraire*. A chacune de ces valeurs correspond une équation et, par conséquent, une courbe. On peut donc dire, lorsqu'on laisse $a$ indéterminé, que l'équation ci-dessus représente une infinité de courbes : elle en représente une *infinité simple*. Ces courbes, d'ailleurs, par le fait seul de leur commune origine, sont analogues et ont entre elles un air de parenté; aussi dit-on que, toutes ensemble, elles forment une *famille de courbes*.

Si le nombre des paramètres eût été supérieur à $n$, l'élimination de $n-1$ d'entre eux entre les $n$ équations considérées nous eût conduits à une équation finale contenant 2, 3, ... constantes arbi-

traires, et représentant, par conséquent, une infinité double, triple, ... de courbes analogues. On eût dit encore que ces courbes, prises toutes ensemble, constituaient une famille.

**1038.** Il en est de même dans l'espace. L'équation

$$f(x, y, z; a) = 0,$$

où $a$ est une *constante arbitraire,* représente une *famille* de surfaces qui en contient une *infinité simple.* — Le système des deux équations

$$f(x, y, z; a) = 0, \qquad g(x, y, z; a) = 0$$

représente une *famille de courbes* généralement gauches.

Nous avons vu que les 3 équations

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

où $u$ et $v$ sont deux variables indépendantes, représentent *paramétriquement* une surface. — Si l'on y suppose $v$ fixe et qu'on y fasse varier $u$, on obtient une famille de courbes situées sur cette surface; si, laissant, au contraire, $u$ fixe, on fait varier $v$, on en obtient une seconde. On dit parfois que ces deux familles sont deux *réseaux* placés sur cette surface. — D'ailleurs, les valeurs particulières de $u$ et $v$ répondant aux deux courbes (une de chaque famille), qui se coupent en un point donné de la surface, peuvent être regardées comme les *coordonnées curvilignes* de ce point.

De même que sur le plan, on peut avoir, dans l'espace, des familles, soit de courbes, soit de surfaces, dépendant de 2, 3, ... paramètres, et contenant, par conséquent, une infinité double, triple, ..., de courbes ou surfaces analogues.

**1039.** Quoi qu'il en soit, les courbes ou surfaces composant une famille se distinguent les unes des autres par les valeurs numériques attribuées aux paramètres ou constantes arbitraires. Pour obtenir une propriété commune à toutes ces courbes ou surfaces, il suffit de trouver, entre les coordonnées, une relation indépendante de ces constantes. On est ramené ainsi au problème classique de l'*élimination des constantes arbitraires,* et cette élimination, effectuée entre l'équation donnée et celles qu'on en tire par *différentiation*, est l'une des sources principales des *équations différentielles.*

**1040.** Comme nous l'avons déjà fait remarquer (222), il convient, quand on écrit les fonctions, d'y séparer, par un *point-et-virgule* ou un *trait vertical,* les variables des constantes arbitraires. — Pour ce qui est de ces constantes elles-mêmes, on les désigne par les premières lettres $a$, $b$, $c$, ... de l'alphabet, ou par une même lettre affectée d'indices, $C_1$, $C_2$, $C_3$, .... Si ces constantes formaient différents groupes, les notations devraient rappeler ces groupes : *les notations doivent toujours s'inspirer de la classification.*

### Fonctions arbitraires.

**1041.** Dans les questions très générales, on introduit parfois des *fonctions indéterminées,* dites *fonctions arbitraires,* ayant pour objet de lier entre eux certains paramètres. Il en résulte que certaines équations nous présentent de pareilles fonctions.

**1042.** Supposons qu'on nous demande l'équation générale des surfaces cylindriques, c'est-à-dire des surfaces engendrées par une droite indéfinie, de direction fixe, qui se meut suivant une loi donnée. Nous désignerons par

$$P = 0, \quad Q = 0$$

les équations de la droite fixe qui détermine la direction considérée; par

$$P = \lambda, \qquad Q = \mu$$

celles de la droite mobile qui engendre la surface, $\lambda$ et $\mu$ étant deux paramètres variables. — Dire que la droite se meut suivant une loi donnée, c'est dire que $\lambda$ et $\mu$ dépendent l'un de l'autre, qu'ils sont liés par une certaine équation

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

où $\varphi$ est une *fonction arbitraire.* — Pour obtenir l'équation générale cherchée, il nous suffit donc d'éliminer $\lambda$ et $\mu$ entre les 3 équations

$$P = \lambda, \qquad Q = \mu, \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

L'équation résultante

$$\varphi(P, Q) = 0$$

représente toutes les surfaces cylindriques possibles; elle renferme, on le voit, la *fonction arbitraire* $\varphi$.

On trouverait de même une fonction arbitraire dans l'équation générale des cônes, dans celle des conoïdes, dans celle des surfaces de révolution, etc., etc.

1043. Certaines questions conduisent même à considérer deux ou plusieurs *fonctions arbitraires*. La *congruence* la plus générale des droites

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

se représenterait par l'ensemble de ces deux équations et des deux relations

$$\varphi(a, b; p, q) = 0, \qquad \chi(a, b; p, q) = 0,$$

où $\varphi$ et $\chi$ seraient des *fonctions arbitraires*.

1044. Quoi qu'il en soit, à toute forme particulière de la fonction arbitraire figurant, par exemple, dans l'équation générale des surfaces cylindriques, correspond une surface cylindrique particulière. L'élimination de la fonction arbitraire entre l'équation générale et celle qu'on en déduit par différentiation donnerait une relation indépendante de cette fonction, relation qui exprimerait, par conséquent, une propriété commune à toutes les surfaces cylindriques. Cette relation, on le sait, comme toutes celles que donne l'*élimination des fonctions arbitraires*, n'est autre chose qu'une *équation aux dérivées partielles*. L'élimination des fonctions arbitraires est l'une des origines de ces équations.

1045. On choisit d'habitude, comme caractéristiques des fonctions arbitraires, les lettres grecques $\varphi, \chi, \psi, \ldots$; mais ce choix n'est point forcé; on pourrait prendre d'autres lettres quelconques, pourvu que leur forme marquât nettement la nature spéciale de ces fonctions.

### Homogénéité véritable.

1046. *On ne peut égaler une quantité quelconque qu'à une quantité de même nature :* une longueur à une longueur, un

volume à un volume, un poids à un poids. Voilà le principe évident d'où découle, dans toutes les parties des Mathématiques, l'*homogénéité* [1] *géométrique* ou, comme on dit d'une façon plus générale, l'*homogénéité de dimensions*, l'*homogénéité véritable*.

1047. *Toute équation relative, soit à une question de Géométrie, soit à une question de Physique, est donc forcément homogène.*

Lorsque l'on écrit, sous sa forme habituelle,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

l'équation générale du troisième degré à une inconnue, si l'on suppose que $x$ soit une longueur, c'est-à-dire une quantité du premier degré, et que $a$ soit un nombre, c'est-à-dire une quantité du degré zéro, les coefficients $b$, $c$, $d$ auront forcément 1, 2, 3 pour degrés respectifs. C'est ce que l'on voit d'ailleurs sur les relations connues qui existent entre les coefficients et les racines.

L'équation

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{K} = 0$$

représente un plan. Les coordonnées $x$, $y$, $z$ sont des longueurs. Si les coefficients A, B, C sont du degré zéro, K est du premier degré.

En coordonnées rectilignes rectangulaires, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + k = 0$$

représente une sphère. Les coordonnées $x$, $y$, $z$ étant toujours des longueurs, les coefficients $a$, $b$, $c$ sont forcément du premier degré, et le coefficient $k$ est forcément du second.

1048. Toutes ces équations sont homogènes, mais elles sont mal écrites, parce que l'homogénéité réelle, celle qui est dans la nature des choses, ne s'y manifeste point par les *notations*. Pour la rendre évidente, il faudra les écrire mieux.

L'équation du troisième degré qui précède s'écrira

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

chaque coefficient exprimant son degré par son indice.

---

[1] Le mot *homogène* figure dans Viète (*Isagoge in artem analyticen*).

L'équation du plan s'écrira, à l'aide d'indices,

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z + k_1 = 0,$$

ou, sans indice,

$$ax + by + cz + \mathrm{K} = 0,$$

les minuscules étant, dans cette seconde équation, des coefficients du degré zéro, et la majuscule, un coefficient du premier degré.

L'équation de la sphère s'écrira

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1 x + 2b_1 y + 2c_1 z + k_2 = 0,$$

ou bien

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + \mathrm{K} = 0,$$

les coefficients indiquant de même leurs degrés : dans la première équation par leurs indices, dans la seconde par leurs grandeurs.

**1049.** Il est à remarquer que, quand les équations initiales sont ainsi écrites, l'homogénéité est en évidence, non seulement dans ces premières équations, mais dans toutes celles qu'on en pourra déduire. *L'homogénéité des équations est une qualité, un caractère qui persiste dans tout le cours du calcul.*

### Homogénéité apparente.

**1050.** Comme nous venons de le voir, les équations, quelles qu'elles soient, possèdent toujours forcément l'*homogénéité de dimensions;* mais c'est à la condition qu'on y tienne compte, non seulement des variables, mais aussi des coefficients ou paramètres. Lorsque l'on n'y considère que les variables, l'équation tantôt est homogène, tantôt ne l'est pas. L'équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2kyz + 2lzx + 2mxy = 0,$$

qui représente un cône du second degré ayant son sommet à l'origine, est homogène en $x$, $y$, $z$. — L'équation générale des surfaces du second degré ne l'est pas, puisqu'elle contient, en $x$, $y$, $z$, des termes du second degré, des termes du premier, et des termes du degré zéro.

Or, les polynomes entiers, homogènes par rapport aux variables,

c'est-à-dire les formes algébriques, possèdent des propriétés remarquables. Quand elles sont du second degré, elles se réduisent à des sommes algébriques de carrés; — quand de degré quelconque, elles se transforment, surtout par l'identité d'Euler, qui les relie à leurs dérivées partielles. Il serait donc fort avantageux de pouvoir rendre toutes les équations ainsi homogènes par rapport aux variables.

1051. On y arrive d'ordinaire en introduisant dans l'équation une variable nouvelle, dite *variable d'homogénéité,* c'est-à-dire en multipliant chaque terme de l'équation par une puissance convenable de cette nouvelle variable. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

de l'ellipse devient alors

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - t^2 = 0,$$

si l'on désigne par $t$ la variable d'homogénéité. — Il est, d'ailleurs, évident que cette introduction de $t$ dans l'équation revient à y remplacer respectivement $x$ et $y$ par $\frac{x}{t}$ et $\frac{y}{t}$, puis à chasser les dénominateurs.

1052. Cet artifice offre l'avantage de conduire parfois à des formules plus régulières et plus simples. Ainsi, la tangente au point $x$, $y$ de la courbe

$$f(X, Y) = 0,$$

non rendue homogène, se représente par la formule

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0;$$

tandis que, lorsque l'équation de la courbe possède la forme homogène

$$\varphi(X, Y, T) = 0,$$

cette même tangente se représente par la formule

$$X\varphi'_x + Y\varphi'_y + T\varphi'_t = 0,$$

qui est évidemment plus régulière et plus simple.

1053. Toutefois, cette façon de rendre homogènes, par rapport aux variables, les équations qui ne le sont pas, est loin d'être irré-

prochable. On peut même dire que l'homogénéité qu'elle apporte n'est qu'une *homogénéité apparente, mensongère,* en contradiction avec l'homogénéité géométrique, qui est l'homogénéité véritable. Les variables $x$, $y$, $t$ sont-elles, en effet, de même nature? Si $x$ et $y$ représentent deux longueurs, $t$ en représente-t-il une troisième? On ne peut pas dire, malgré l'usage, que $x$, $y$, $t$ sont des *variables homogènes.* C'est une faute de le dire. — Au point de vue des notations, cette faute serait encore plus grave si, dans la Géométrie analytique à deux dimensions, on remplaçait $t$ par $z$.

1054. Pour obtenir des coordonnées *véritablement homogènes,* le meilleur procédé, pour ne pas dire le seul, consiste à choisir des systèmes de coordonnées spéciaux. Dans le plan, par exemple, les coordonnées *barycentriques* (1); dans l'espace, les coordonnées *proposées* par Heger (2). Ou plutôt, d'une façon générale, et dans tous les cas, les coordonnées *surabondantes;* c'est-à-dire les coordonnées *polygonales* dans le plan et, dans l'espace, les coordonnées *polyédriques.*

Les équations obtenues alors nous présentent à la fois l'homogénéité algébrique et l'homogénéité géométrique; en d'autres termes, l'homogénéité apparente et l'homogénéité réelle. Elles nous conduisent aux formules régulières simples dont nous avons parlé. Si une courbe est représentée en coordonnées trilinéaires par l'équation homogène

$$\varphi(P, Q, R) = 0,$$

la tangente à cette courbe, au point $p$, $q$, $r$, l'est par l'équation

$$P\varphi'_p + Q\varphi'_q + R\varphi'_r = 0.$$

*Les vraies coordonnées homogènes,* on ne saurait trop le répéter, *sont les coordonnées surabondantes.*

### Symétrie des équations.

1055. Dans l'étude générale des lignes et des surfaces, toutes les coordonnées évidemment doivent être traitées de même. On repré-

(1) Möbius, *Barycentriker Calcul,* 1827.
(2) *Bulletin des Sciences mathématiques* de Darboux, in-8°, Paris, 1870, p. 277.

sentera donc une ligne plane soit par les deux équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t),$$

soit par l'équation unique

$$f(x, y) = 0.$$

On représentera de même les lignes à double courbure par les 3 équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t),$$

ou par les deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

On représentera enfin une surface, soit par les 3 équations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

soit par l'équation unique

$$f(x, y, z) = 0.$$

Dans ces différents modes de représentation, les coordonnées, au nombre tantôt de 2, tantôt de 3, sont toutes traitées de la même façon.

1056. On peut remarquer qué chacune des équations non résolues

$$f(x, y) = 0, \qquad f(x, y, z) = 0$$

nous présente, par rapport aux coordonnées, une *symétrie parfaite,* tandis que les équations résolues

$$y = g(x), \qquad z = g(x, y)$$

sont l'une et l'autre dissymétriques. Seulement, dans certaines questions particulières, il peut arriver que cette dissymétrie dans l'écriture corresponde à une dissymétrie inhérente à la question même : elle cesse alors d'être un défaut, pour devenir une qualité.

1057. Beaucoup de formules usuelles, pour ainsi dire classiques, manquent d'une *symétrie* qu'elles devraient posséder.

Étant donnés, dans un plan, deux points $P_1$, $P_2$, qui ont pour coordonnées respectives $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, on exprime souvent les coordonnées $x$, $y$ du point qui en partage la distance dans un rap-

port donné par les formules

$$x = \frac{x_1 + \rho x_2}{1 + \rho}, \qquad y = \frac{y_1 + \rho y_2}{1 - \rho}.$$

Pourquoi faire porter le coefficient numérique $\rho$ sur l'un des points plutôt que sur l'autre? N'y a-t-il pas là une *dissymétrie* contraire à la nature des choses? Ne devrait-on pas écrire

$$x = \frac{\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2}{\rho_1 + \rho_2}, \qquad y = \frac{\rho_1 y_1 + \rho_2 y_2}{\rho_1 + \rho_2},$$

en faisant usage de deux paramètres?

Deux courbes du même degré étant représentées respectivement par les équations

$$\varphi = 0, \qquad \chi = 0,$$

on a l'habitude de mettre l'équation générale des courbes de ce degré qui passent par tous leurs points d'intersection sous la forme

$$\varphi + \lambda\chi = 0.$$

Cette forme ne nous présente-t-elle pas une *dissymétrie* fautive? Ne devrait-on pas écrire

$$\lambda\varphi + \mu\chi = 0,$$

avec deux paramètres encore?

L'usage où l'on est de déterminer la direction d'une droite dans un plan par ce qu'on appelle son *coefficient angulaire* est une source de dissymétries analogues aux précédentes. Une conique étant représentée par l'équation

$$= 0,$$

le diamètre conjugué de ses cordes de coefficient angulaire $m$ a pour équation

$$f'_x + m f'_y = 0.$$

Ne devrait-on pas l'écrire

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant deux coefficients directeurs? Ne devrait-on pas, ainsi que Laguerre [1] l'a souvent conseillé, déterminer toujours une

[1] Né en 1834, mort en 1886.

*direction,* dans le plan, par *deux paramètres,* comme on la détermine, dans l'espace, par *trois?*

1058. Dans les exemples qui précèdent, nous avons constamment remplacé un paramètre unique, réellement suffisant, par un couple de paramètres. Ce couple était exigé par la symétrie. Les deux paramètres qui le composent, et dont l'emploi est si avantageux, pourraient se nommer des *paramètres surabondants.*

### Accord des équations.

1059. Il est très souvent nécessaire, quand on commence l'étude d'une question, d'associer à une première équation, donnée ou choisie, une équation nouvelle. Cette seconde équation ne saurait être prise arbitrairement : il faut qu'elle soit en complet *accord* avec la première. C'est surtout sur les considérations de symétrie que cet accord doit être fondé.

1060. Supposons qu'il s'agisse d'étudier une courbe gauche, dans la représentation de laquelle les 3 coordonnées soient traitées de même. — Si cette courbe nous est donnée sous la forme paramétrique

$$X = \varphi(T), \qquad Y = \chi(T), \qquad Z = \psi(T),$$

sa tangente sera représentée par les équations

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz},$$

qui en sont les équations canoniques. — Si elle nous est donnée par les deux équations simultanées

$$f(X, Y, Z) = 0, \qquad g(X, Y, Z) = 0,$$

sa tangente le sera par les deux équations

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y + (Z - z) f'_z = 0,$$
$$(X - x) g'_x + (Y - y) g'_y + (Z - z) g'_z = 0,$$

qui leur correspondent respectivement.

**1061.** Considérons une surface quelconque, représentée par l'équation *symétrique*

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

En l'un quelconque $x$, $y$, $z$ de ses points, son plan tangent sera donné par l'équation

$$(X - x)f_x - (Y - y)f_y - (Z - z)f_z = 0,$$

et sa normale par les équations

$$\frac{X - x}{f_x} = \frac{Y - y}{f_y} = \frac{Z - z}{f_z}.$$

Si la surface eût été donnée sous la forme *dissymétrique*

$$Z = \varphi(X, Y),$$

son plan tangent eût dû être pris sous la forme

$$Z - z = p(X - x) - q(Y - y),$$

et sa normale sous la forme

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1},$$

$p$ et $q$ désignant les valeurs, au point considéré, des dérivées partielles de Z par rapport à X et Y.

**1062.** On connaît l'expression du rayon de courbure en un point d'une ligne plane. Cette expression change suivant que la variable indépendante est laissée arbitraire ou qu'elle se confond avec l'une des coordonnées.

Si l'on veut le rayon de courbure au point $x$, $y$ de l'ellipse

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

où les deux coordonnées sont traitées de même, on exprimera celles-ci à l'aide de l'*angle auxiliaire* $\varphi$, et l'on prendra, pour le rayon de courbure, la formule

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Si l'on demande le rayon de courbure au point $x$, $y$ de la parabole

$$Y^2 = 2pX,$$

il sera naturel de prendre X pour variable indépendante; on aura recours à la formule

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

où $y'$ et $y''$ désignent, au point considéré, les dérivées première et seconde de Y par rapport à X.

**1063.** Soit à résoudre ce problème : *Trouver les points où une droite donnée perce une surface donnée.*

Si la surface est représentée par l'équation générale

$$f(X, Y, Z) = 0,$$

où les 3 coordonnées sont *traitées de même,* on représentera la droite par les équations

$$X = x + \alpha\rho, \qquad Y = y + \beta\rho, \qquad Z = z + \gamma\rho,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant les cosinus directeurs, et $\rho$ le segment qui va du point $x$, $y$, $z$ au point X, Y, Z.

Si la surface était l'hyperboloïde à une nappe donné par l'équation

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

où Z entre d'une *manière spéciale,* il faudrait prendre, pour la droite, les équations

$$X = \alpha Z + p, \qquad Y = \beta z + q,$$

où Z entre de même.

S'il s'agissait du paraboloïde elliptique

$$\frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} = 2X,$$

il faudrait que les équations de la droite continssent X d'une *façon*

*particulière*. On prendrait les deux équations

$$Y = \beta X - b, \qquad Z = \gamma X + c.$$

Il est évident que c'est d'équations de ces dernières formes qu'il conviendrait de se servir pour trouver, par une méthode vraiment analytique, les génératrices rectilignes des surfaces du second degré.

---

# CHAPITRE XI.

## DIRECTION DES CALCULS.

### Calculs mécaniques.

1064. L'Algèbre est une sorte de machine. En l'employant, on applique la méthode analytique pour ainsi dire mécaniquement. C'est surtout dans les calculs que ce *mécanisme* présente tous ses avantages.

1065. Soient à former plusieurs expressions analogues. Il suffira, en général, d'en calculer directement une seule. En remarquant de quelle façon les autres diffèrent de celle-là, on pourra les en déduire. Pour calculer $(a+b)^m$ et $(a-b)^m$, il suffira de former la première expression, puis de changer dans le résultat le signe de la lettre $b$. De même, si $f(x)$ est un polynome à coefficients réels, et qu'on ait formé $f(\alpha+\beta i)$, il suffira, pour obtenir $f(\alpha-\beta i)$, d'y changer le signe de $i$.

Supposons que, connaissant les expressions des 4 racines de l'équation bicarrée générale, on veuille vérifier que la somme de leurs produits 3 à 3 est nulle. On formera le premier de ces produits et l'on n'aura qu'à effectuer des changements dans les signes + et — pour en tirer immédiatement les 3 autres.

1066. Cette façon de déduire mécaniquement les expressions les unes des autres n'est jamais plus visible que quand on l'effectue en *permutant circulairement* les lettres.

Si les termes successifs d'une expression peuvent se déduire ainsi les uns des autres, il faut les écrire de cette manière. L'expression

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

est donc mal écrite.

Dans l'équation

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2x^2yz - 2y^2zx - 2z^2xy = 0,$$

qui, en coordonnées trilinéaires, représente l'hypocycloïde à 3 rebroussements, le premier membre est très bien écrit. — Si cette même équation affectait la forme

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2 = 0,$$

que je rencontre en un bon Ouvrage, son premier membre serait mal écrit, puisqu'on y tournerait dans la première moitié, mais non pas dans la seconde.

Lorsque plusieurs fonctions, plusieurs équations peuvent se déduire les unes des autres par permutations circulaires, il est toujours commode d'effectuer ces permutations. Par exemple, des 3 fonctions

$$(b-c)^3, \qquad (c-a)^3, \qquad (a-b)^3,$$

on ne calculera que la première : les autres s'en déduiront mécaniquement.

**1067.** Lorsqu'un système d'équations à plusieurs inconnues ne change pas, ou plutôt reste équivalent à lui-même, quand on y permute, à la fois, circulairement, les inconnues d'une part et certaines données de l'autre, il en est évidemment de même de tous les systèmes qui en sont des conséquences, et en particulier de celui qui nous donne les expressions des inconnues. Il suffit donc de calculer une *seule* de celles-ci. Par permutation circulaire, on en peut déduire les autres.

Soit le système

$$y + z - x = a, \qquad z + x - y = b, \qquad x + y - z = c,$$

qui ne change point lorsqu'on y permute circulairement, d'une part $x$, $y$, $z$, de l'autre $a$, $b$, $c$. Si, par un moyen quelconque, on a trouvé la valeur de $x$, on en déduira immédiatement, par permutation circulaire, celles de $y$ et de $z$.

### Addition des équations.

**1068.** Comme nous l'avons dit précédemment, les équations analogues doivent être placées les unes sous les autres, d'une façon très

régulière. Il faut qu'elles se succèdent dans un ordre convenable; qu'elles soient écrites de la même manière; et, dans la plupart des cas, que leurs termes semblables se correspondent exactement.

1069. Lorsque ces équations se déduisent les unes des autres par permutations circulaires, elles doivent donc se succéder dans l'ordre même où ce procédé nous les donne. C'est ce qui a lieu dans le système

$$\begin{aligned} y + z - 2x &= 1, \\ z - x - 2y &= 1, \\ x + y - 2z &= 1. \end{aligned}$$

Lorsque ces équations résultent d'une suite de calculs, il les faut placer dans l'ordre où ces calculs nous les fournissent. C'est ce que l'on voit sur le système

$$\begin{aligned} A &= A_1 a_1 + A_2, \\ A_1 &= A_2 a_2 + A_3, \\ A_2 &= A_3 a_3 + A_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

formé des égalités qu'on obtient lorsqu'on réduit en fraction continue le quotient de A par $A_1$.

1070. Dans toutes ces *équations analogues,* les termes doivent être *groupés* de la même façon. Il en est ainsi dans les deux systèmes qu'on vient d'écrire. — Mais, lorsque les équations considérées doivent être ajoutées ou retranchées membres à membres, il faut de plus que leurs *termes semblables* soient exactement *placés les uns sous les autres.* Dans ce dernier cas, il faut donc renoncer à procéder par permutations circulaires. Le premier des deux systèmes précédents devrait donc s'écrire

$$\begin{aligned} -x - y + z &= 1, \\ x - y + z &= 1, \\ x + y - z &= 1. \end{aligned}$$

C'est de cette façon encore qu'il convient d'écrire les systèmes d'équations linéaires, lorsque l'on y veut considérer le déterminant formé par les coefficients des inconnues.

1071. S'il arrivait que quelques termes manquassent dans cer-

taines équations, il faudrait laisser leurs places vides, en cette sorte

$$\begin{aligned} \quad\quad y + z &= a, \\ x \quad\quad - z &= b, \\ x + y \quad\quad &= c; \end{aligned}$$

ou bien y marquer une *étoile* en écrivant,

$$\begin{aligned} \star + y + z &= a, \\ x + \star + z &= b, \\ x + y + \star &= c. \end{aligned}$$

Cet usage de l'étoile, qui se rencontre fréquemment dans des Livres récents, remonte (¹) au moins à Lhopital (²).

**1072.** Quoi qu'il en soit, quand on combine les équations membres à membres, il est avantageux de les *ajouter toujours,* de ne faire jamais de soustractions.

Soit à déterminer les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de telle sorte que le polynome

$$\alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x - \delta$$

devienne une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 6\frac{d^2 y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = x^3 - x - 1.$$

On posera

$$u = \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta;$$

on écrira les unes sous les autres les 4 équations qui donnent $u$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^3 u}{dx^3}$; puis on les ajoutera membres à membres, après en avoir multiplié respectivement les deux membres par

$$-6, \quad +11, \quad -6, \quad -1.$$

Évidemment, il revient au même de retrancher après avoir multiplié par 6 ou d'ajouter après avoir multiplié par $-6$. C'est l'expérience qui nous montre : qu'il vaut mieux *toujours ajouter;* que le mélange des additions et des soustractions est fréquemment une cause d'erreurs.

---

(¹) *Analyse des infiniment petits,* in-8, Paris, 1768, p. 243.

(²) Né en 1661, mort en 1704.

### Notations abréviatives.

**1073.** Les calculs sont évidemment d'autant plus faciles et d'autant moins sujets à erreurs que les expressions sur lesquelles ils portent sont plus courtes et plus simples. Une expression longue, compliquée, qui traverse la plus grande partie d'un calcul sans subir de modification, est un véritable embarras. Rien qu'à la copier, on risque de faire des fautes. Voilà pourquoi nous avons conseillé (462), plusieurs fois déjà, de la remplacer, tant qu'elle reste la même, par une *lettre unique*. Cette lettre est une sorte de *notation abréviative*, qu'on introduit à un certain moment, et qui disparaît avant la fin du calcul.

**1074.** Lorsque des doubles signes $\pm$ se présentent ensemble dans une même question, qu'ils y soient, d'ailleurs, ou n'y soient pas indépendants les uns des autres, ils exigent de la part du calculateur une attention très grande. Il y a avantage à les remplacer chacun par des lettres $\varepsilon$, $\eta$, $\zeta$, ..., qu'on ne remplacera à leur tour par les doubles signes que tout à la fin du calcul. C'est ce que l'on devrait faire dans les fractions continues où chaque numérateur est affecté d'un double signe. C'est ce que l'on fait lorsque, remplaçant une forme quadratique par une somme algébrique de carrés, on l'écrit

$$\varepsilon P^2 + \eta Q^2 + \zeta R^2 + \ldots.$$

Mais il est bien évident que, quand les doubles signes ne sont point soumis au calcul, il est inutile de les remplacer ainsi. Pour indiquer les valeurs que peut prendre $h$ dans une certaine équation, on peut, à côté d'elle, placer la parenthèse [1]

$$(h = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Pour représenter les longueurs des tangentes communes à 4 cercles, un auteur éminent [2] a raison d'écrire

$$(12)(34) \pm (14)(23) \pm (13)(24) = 0.$$

---

[1] SCHOTTKY, *Bulletin des Sciences mathématiques* de Darboux, in-8, Paris, 1893, 2e Partie, p. 16.

[2] SALMON, *Sections coniques*, in-8, Paris, 1870, p. 163.

Il est bien certain, d'ailleurs, qu'on ne doit point supprimer tout à fait les doubles signes, et qu'il est mauvais d'écrire

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0,$$

au lieu de

$$\pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = 0,$$

comme on le fait dans un certain Livre.

**1075.** La résolution des équations à une inconnue est souvent simplifiée par l'emploi d'une *notation abréviative* ou, comme on dit, par le *changement de l'inconnue*.

Pour résoudre l'équation

$$x^2 - x - 3\sqrt{2x^2 - x - 2} = \frac{x}{2} + 1,$$

on pose ainsi

$$\sqrt{2x^2 - x - 2} = y.$$

Pour résoudre

$$\sqrt[3]{x^n} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^n}} = \frac{16}{3}x^{-n},$$

on pose

$$x^{\frac{2n}{3}} = y.$$

**1076.** Il est parfois avantageux de prendre, pour *inconnues temporaires,* les *inverses* des inconnues véritables. On procède ainsi dans le système

$$yz = a(y + z), \qquad zx = b(z + x), \qquad xy = c(x - y),$$

qu'on peut ramener en divisant, avec les restrictions connues, par des produits convenables, à la forme

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b}, \qquad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{c},$$

qui est évidemment beaucoup plus simple.

**1077.** Dans d'autres cas, plus fréquents, on considère *temporairement* comme inconnues les rapports $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$. C'est ce qu'il convient de faire dans une multitude de questions relatives soit

aux courbes, soit aux surfaces du second degré, lorsque les équations de ces courbes ou surfaces sont ramenées à leurs formes canoniques.

Pour résoudre le système

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = 1,$$

que l'on rencontre dans un problème sur l'hyperbole, il conviendrait, non seulement d'écrire

$$\frac{x}{a} = x_1, \qquad \frac{y}{b} = y_1,$$

mais d'écrire en même temps

$$\frac{\alpha}{a} = \alpha_1, \qquad \frac{\beta}{b} = \beta_1.$$

1078. Soit à intégrer l'*équation différentielle totale*

$$(bz - cy)\,dx + (cx - az)\,dy + (ay - bx)\,dz = 0.$$

On simplifiera beaucoup les calculs en divisant d'abord par $abc$, ce qui nous donnera l'équation

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\frac{dx}{a} + \left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right)\frac{dy}{b} + \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\frac{dz}{c} = 0,$$

puis en posant

$$\frac{x}{a} = x_1, \qquad \frac{y}{b} = y_1, \qquad \frac{z}{c} = z_1.$$

### Changements de variables, substitutions.

1079. Les notations abréviatives dont nous venons de parler n'étaient que des procédés particuliers. Les *changements de variables* et les *substitutions* sont, au contraire, des procédés généraux. Comme nous allons le voir, ils constituent, au point de vue analytique, de véritables méthodes de transformation.

1080. L'un des premiers exemples que l'on en puisse citer est

celui que nous fournit la recherche des intégrales indéfinies

$$\int (ax+b)^n\,dx, \quad \int \frac{dx}{x^2+2px+q}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2px+q}}.$$

Pour calculer la première, on écrit

$$ax+b=u.$$

Pour la deuxième et la troisième, après avoir mis le trinome $x^2+2px+q$ sous l'une des formes

$$(x-\alpha)^2-\beta^2, \qquad (x-\alpha)^2-\beta^2,$$

on écrit

$$x-\alpha=\beta t.$$

1081. C'est par la substitution

$$x=e^t$$

que l'on ramène l'équation différentielle linéaire

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}-A_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-A_2x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}-\ldots+A_ny=0$$

à une équation différentielle linéaire *à coefficients constants*.

C'est par la substitution

$$y=uv$$

que l'on intègre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}-Py-Q=0,$$

où P et Q sont des fonctions de $x$ seulement; et même l'équation

$$\frac{dy}{dx}+Py+Qy^n=0,$$

qui est une généralisation de l'*équation de Bernoulli*.

1082. En posant

$$y=uv,$$

on remplace la *fonction* $y$ par deux autres $u$ et $v$. On remplace parfois aussi l'*inconnue* d'une équation par deux autres. L'une des

méthodes de résolution de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

consiste, en effet, à remplacer $x$ par la somme $u + v$.

1083. C'est par les changements de variable que s'effectuent les changements ou *transformations* dont les équations algébriques sont susceptibles.

Pour former l'équation aux *inverses* des racines d'une équation donnée, on pose

$$\frac{1}{x} = y.$$

Pour former l'équation aux *carrés des racines,* on pose

$$x^2 = y.$$

Et l'on pose de même

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

pour résoudre l'*équation réciproque* de degré quelconque.

1084. Dans l'étude des *équations algébriques,* les *substitutions* jouent un rôle capital. C'est en les employant systématiquement que Galois a renouvelé cette étude et l'a complètement transformée. — Dans la théorie des *formes algébriques,* ce sont aussi les *substitutions* qui jouent le rôle principal.

Lorsque l'on passe d'un système de coordonnées à un autre, les formules qui donnent les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles constituent évidemment une substitution. On connaît l'importance, en Géométrie analytique, soit sur le plan, soit dans l'espace, des substitutions de cette sorte. C'est par elles que l'on ramène les équations des courbes, comme celles des surfaces, à leurs formes les plus simples, à leurs formes canoniques.

### Systèmes symétriques d'équations disparates.

1085. Quelque problème que l'on cherche à résoudre, une équation telle que

$$x + y + z = s,$$

*symétrique* par rapport à *toutes* les inconnues, est une équation *isolée,* seule de son espèce. S'il existe, dans le même problème, d'autres équations, symétriques chacune par rapport à toutes les inconnues, elles sont d'une autre sorte que la première; elles ne lui ressemblent pas et, entre elles, ne se ressemblent pas non plus.

On rencontre assez souvent des systèmes formés de pareilles équations, c'est-à-dire d'équations disparates, séparément symétriques par rapport à toutes les inconnues. De tels systèmes sont évidemment symétriques eux-mêmes par rapport à toutes ces inconnues.

Ces inconnues devront se calculer toutes de la même manière. C'est, en effet, un principe évident que *les objets symétriques doivent être traités symétriquement.*

**1086.** Les systèmes de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = a, \\ x^3 + y^3 = b^3 \end{cases}$$

sont ainsi formés : chacun d'eux se compose de deux équations *disparates,* séparément *symétriques* par rapport aux deux inconnues.

Il en est de même des systèmes

$$\begin{cases} x + y = xy, \\ x + y + x^2 + y^2 = a, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

**1087.** Comment résoudre chacun de ces systèmes en y traitant les 2 inconnues de la même façon? Le moyen le plus raisonnable, le plus conforme au principe évident qui précède, c'est de former l'équation du second degré dont ces 2 inconnues sont les racines. On posera donc

$$x + y = s, \qquad xy = \mathrm{P};$$

on calculera successivement $s$ et P; puis l'on résoudra l'équation

$$\mathrm{Z}^2 - s\mathrm{Z} + \mathrm{P} = 0,$$

qui a pour racines les valeurs des 2 inconnues.

**1088.** Certains systèmes de deux équations, qui ne possèdent pas

d'eux-mêmes la forme des précédents, peuvent se ramener facilement à cette forme.

Soit le système

$$x - y = a, \qquad x^2 + y^2 = b^2,$$

dont la seconde équation est symétrique en $x$ et $y$, mais non pas la première. Il suffit de poser

$$y = -z,$$

pour que le système, prenant la forme

$$x + z = a, \qquad x^2 + z^2 = b^2,$$

ait chacune de ses équations symétrique par rapport aux 2 inconnues.

1089. Revenons aux systèmes que nous considérons présentement. Le système

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= c^3 \end{aligned}$$

se compose de 3 équations *disparates*, séparément *symétriques* par rapport aux 3 inconnues. Nous poserons

$$yz + zx + xy = s_2, \qquad xyz = s_3,$$

puis nous calculerons ces inconnues auxiliaires $s_2$, $s_3$.

Leurs valeurs obtenues, nous formerons l'équation

$$U_3 - aU^2 + s_2 U - s_3 = 0;$$

et cette équation aura précisément pour racines les valeurs des inconnues $x, y, z$.

On procéderait de même dans le cas d'un plus grand nombre d'équations et d'inconnues. Le procédé est général. Il indique de lui-même les inconnues auxiliaires qu'il convient de choisir, remplaçant ainsi ce qui pouvait paraître un artifice par une méthode naturelle, régulière, raisonnée.

### Systèmes symétriques d'équations analogues.

1090. Supposons que les inconnues d'un problème y entrent toutes de même, y jouent toutes le même rôle, y soient, en un mot, toutes de la même sorte. Si une équation ne les contient pas toutes

à la fois, symétriquement, cette équation n'est point une équation isolée; elle fait partie d'un système d'*équations analogues* entre elles; et c'est ce système qui est *symétrique* par rapport à toutes les inconnues.

**1091.** Comme systèmes ainsi constitués, nous citerons d'abord les trois suivants :

$$\begin{cases} y - z = a, \\ z - x = b, \\ x - y = c, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = a, \\ y - z - v = b, \\ z - v - x = c, \\ v + x - y = d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z - v = a, \\ y - z + v - x = b, \\ z - v + x - y = c, \\ v - x - y - z = d. \end{cases}$$

D'après nos principes, dans la résolution de chacun d'eux, toutes les inconnues doivent être traitées de la même manière. On voit qu'on les obtiendrait immédiatement si l'on en connaissait la *somme*. C'est donc à la détermination, très facile, de cette somme que la question se trouve ramenée.

**1092.** La résolution de chacun des systèmes

$$\begin{cases} yz = a, \\ zx = b, \\ xy = c, \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2(y - z) = xyz, \\ b^2(z + x) = yzx, \\ c^2(x + y) = zxy \end{cases}$$

se ramènerait de même à la détermination du *produit* des 3 inconnues.

**1093.** On simplifie infiniment la résolution du système

$$\begin{aligned} (y - c)(z - b) &= a^2, \\ (z - a)(x - c) &= b^2, \\ (x - b)(y - a) &= c^2 \end{aligned}$$

en y faisant la *substitution*

$$\begin{aligned} x &= b + c + x', \\ y &= c + a + y', \\ z &= a + b + z'. \end{aligned}$$

car on le ramène ainsi au système

$$\frac{1}{y'} - \frac{1}{z'} = -\frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{z'} + \frac{1}{x'} = -\frac{1}{b}, \qquad \frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = -\frac{1}{c},$$

que l'on peut regarder comme un système d'équations linéaires.

1094. Quant aux deux systèmes

$$\begin{cases} x^2 - yz = a^2, \\ y^2 - zx = b^2, \\ z^2 - xy = c^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 + z^2 + yz = a^2, \\ z^2 + x^2 + zx = b^2, \\ x^2 + y^2 + xy = c^2, \end{cases}$$

dont le second comporte une solution géométrique, ce sont deux systèmes difficiles à résoudre. On en a fait connaître différentes solutions. La meilleure est, pour chacun d'eux, celle qui repose sur le calcul des *fonctions symétriques* des inconnues, c'est-à-dire celle qui est conforme à nos principes généraux.

### Systèmes linéaires.

1095. Les systèmes non symétriques, linéaires par rapport aux inconnues, ne nous offrent point, comme les précédents, la ressource de recourir aux fonctions symétriques. On les résoudra : soit par la méthode de *substitution,* soit par la méthode de *réduction,* soit à l'aide des *déterminants.*

On résoudra ainsi : par la méthode de *substitution,* le système

$$x + y = a, \qquad \frac{x}{y} = m;$$

par la méthode de *réduction,* les systèmes

$$\begin{cases} ax + by = a + b, \\ a^2x + b^2y = a^2 + b^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} u + \dfrac{x}{a} = n, \\ x + \dfrac{y}{b} = n, \\ y + \dfrac{z}{c} = n, \\ z + \dfrac{u}{d} = n: \end{cases}$$

par les *déterminants,* enfin, chacun des deux systèmes

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x+y-z=b, \\ x-y+z=c, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ bx+cy+az=a^2+b^2+c^2, \\ cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2. \end{cases}$$

1096. Le système

$$cy-bz=a, \qquad az+cx=b, \qquad bx+ay=c$$

peut se résoudre par chacun des procédés qu'on vient d'indiquer; mais comme il ne change pas quand on y permute circulairement d'une part $x$, $y$, $z$, de l'autre $a$, $b$, $c$, il suffit de calculer une seule des 3 inconnues; les 2 autres s'en déduisent mécaniquement.

1097. Soit le système très régulier

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=k, \\ a^2x+b^2y+c^2z&=k^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z&=k^3. \end{aligned}$$

On peut le résoudre par les formules de Cramer; les déterminants qu'elles renferment sont alors des déterminants de Vandermonde; de là des simplifications immédiates. Mais on peut aussi, à cause de sa grande régularité, résoudre ce système pour ainsi dire *sans calcul.*

Il est évident, en effet, que si $k$ était égal successivement à $a$, à $b$, à $c$, le système admettrait successivement les solutions 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. Il s'ensuit immédiatement

$$x=\frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)},$$

et les inconnues $y$ et $z$ se déduisent de là par permutations tournantes.

1098. Considérons encore le système

$$\begin{aligned} x+ay+a^2z+a^3&=0, \\ x+by+b^2z+b^3&=0, \\ x+cy+c^2z+c^3&=0, \end{aligned}$$

qui est aussi très régulier. Les formules de Cramer nous donneraient

encore, pour $x, y, z$, des expressions qui se simplifieraient beaucoup. Mais ces expressions peuvent aussi s'obtenir *sans calcul*.

Prenons, en effet, l'équation

$$x + yU + zU^2 + U^3 = 0,$$

qui est du troisième degré en U. Les équations du système considéré expriment simplement que $a$, $b$, $c$ en sont les 3 racines. Les relations connues entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique nous permettent donc d'exprimer immédiatement $x, y, z$ en fonction de $a$, $b$, $c$.

### Inconnues de plusieurs sortes.

1099. Dans une foule de problèmes présentant 3 inconnues, deux de ces inconnues entrent symétriquement, tandis que la troisième joue un rôle particulier. Les *notations* devraient rappeler cette *classification :* elles ne la rappellent presque jamais.

1100. Lorsque l'on cherche les trois côtés d'un triangle rectangle, on les nomme $x, y, z$, en désignant l'hypoténuse par $z$. — Il faudrait conserver $x$ et $y$ pour les côtés de l'angle droit, et appeler l'hypoténuse $u$.

Dans chacun des systèmes

$$\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 2p, \\ x^2 + y^2 &= z^2, \\ xy &= 2m^2, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 2p, \\ xy &= az, \\ x^2 + y^2 &= z^2, \end{aligned}\right.$$

$z$ est traité d'une manière *spéciale*, $x$ et $y$ sont traités *symétriquement*.

Dans le système

$$\begin{aligned} x - y - z &= a, \\ x^2 - y^2 - z^2 &= b^2, \\ zx &= y^2, \end{aligned}$$

c'est, au contraire, $y$ qui joue le *rôle spécial*.

**1101.** Dans le système à 4 inconnues

$$xy = a, \qquad xz = b, \qquad xu = c, \qquad xyzu = d,$$

où, d'ailleurs, les notations sont mauvaises, c'est $x$ aussi qui joue un *rôle spécial*, $y$, $z$, $u$ entrant d'une manière symétrique.

Dans le système, à 4 inconnues encore,

$$x - y - z = 2p, \qquad xy = uz, \qquad x^2 - y^2 = z^2, \qquad u - z = a,$$

il est évident que $x$ et $y$ entrent *symétriquement*, mais que $z$ et $u$ entrent chacun d'une *façon particulière;* il y a 3 sortes d'inconnues. Il faudra que $x$ et $y$ soient calculés symétriquement. C'est une règle stricte : *les inconnues entrant symétriquement doivent être calculées symétriquement.* — Il sera, en général, avantageux de déterminer d'abord l'inconnue qui est seule de son espèce ou, s'il y en a plusieurs, celles qui jouent chacune un rôle particulier.

### Cas des équations continues.

**1102.** Le partage d'une somme S en parties proportionnelles aux 3 nombres $a$, $b$, $c$ conduit immédiatement au système des 3 équations

$$x + y + z = S,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

dont la première est seule de son espèce, et dont les 2 suivantes sont analogues entre elles. Évidemment, il y faut traiter $x$, $y$, $z$ de la même façon. On y arrive en prenant pour *inconnue auxiliaire* la *valeur commune* des 3 rapports égaux.

On opérerait de même pour le système

$$mx + ny - pz = k,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

De même encore pour le système

$$x + y - z = S,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{p}{q},$$

qui se ramène, d'ailleurs, au premier des précédents.

**1103.** Il serait très avantageux de choisir la même *inconnue auxiliaire* pour résoudre chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{a} = \dfrac{y-\beta}{b} = \dfrac{z-\gamma}{c}, \\ z+y+z = S, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-a}{b+c} = \dfrac{y-b}{c+a} = \dfrac{z-c}{a-b}, \\ mx+ny+pz = k. \end{cases}$$

**1104.** On peut ramener encore à cette même forme, et résoudre par ce même moyen, chacun de ces nouveaux systèmes :

$$\begin{cases} a'x+b'y+c'z = 0, \\ a''x+b''y+c''z = 0, \\ x^2+y^2-z^2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z = 0, \\ (b+c)x+(c+a)y+(a-b)z = 0, \\ bcx+cay+abz = 1. \end{cases}$$

Il suffit, en effet, dans chacun d'entre eux, de tirer des deux premières équations des quantités proportionnelles aux inconnues $x$, $y$, $z$, puis de prendre, pour inconnue *auxiliaire,* la valeur *commune* des 3 rapports obtenus.

**1105.** Mais les suites de rapports égaux ne sont qu'un cas particulier des équations continues. Toutes les fois qu'on rencontrera une telle équation, on pourra procéder comme nous venons de le faire.

Pour résoudre le système

$$ax^3 = by^3 = cz^3,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{k},$$

on prendra, pour inconnue auxiliaire, la valeur commune des 3 produits $ax^3$, $by^3$, $cz^3$.

Soient à trouver les coordonnées $x$, $y$, $z$ du centre du cercle passant par les 3 points A, B, C situés sur 3 axes de coordonnées rectangulaires, aux distances $a$, $b$, $c$ de l'origine. En écrivant que ce centre est équidistant de ces 3 points, on arrive au système

$$-2ax+a^2 = -2by+b^2 = -2cz+c^2,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1,$$

dont la première partie est une équation continue. On prendra comme inconnue auxiliaire la valeur commune de ses 3 membres.

1106. Il faut le remarquer soigneusement : dans les exemples qui précèdent, le choix de l'inconnue auxiliaire n'a jamais été un *artifice;* il a été toujours une conséquence naturelle de notre précepte général : *en toute question, calculer symétriquement les inconnues qui entrent symétriquement.*

## Élimination.

1107. Les calculs d'élimination doivent s'effectuer comme tous les autres. Il faut, lorsqu'il en est besoin, y employer les *notations abréviatives* et, dans tous les cas possibles, y tenir compte des *classifications,* c'est-à-dire des symétries et dissymétries.

1108. Soient à éliminer $\lambda$ et $\mu$ entre les 3 équations

$$x^2(\lambda^2 - \mu) - y(\lambda - 1) + a = 0,$$
$$x(\lambda - 1) - y(\lambda^2 + \mu) + b = 0,$$
$$ax + by - (\lambda^2 - \mu) = 0.$$

N'est-il pas évident qu'on simplifie beaucoup le problème en posant

$$\lambda^2 - \mu = \alpha, \qquad \lambda - 1 = \beta,$$

puis en éliminant les *notations abréviatives* $\alpha$ et $\beta$?

1109. Pour éliminer deux inconnues entre trois équations, dont les *deux premières* sont *analogues,* on tirera de ces deux-ci les valeurs des inconnues pour les porter dans la troisième. C'est ainsi qu'on opérera pour éliminer $\lambda$ et $\mu$ entre les trois équations

$$A_1\lambda + B_1\mu - K_1 = 0,$$
$$A_2\lambda + B_2\mu + K_2 = 0,$$
$$\varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

*Les quantités symétriques doivent s'éliminer symétriquement.*

1110. On opérera de même pour éliminer $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ entre les 3 équations

$$a_1\cos\varphi - b_1\sin\varphi = d_1,$$
$$a_2\cos\varphi - b_2\sin\varphi = d_2,$$
$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

dont on n'écrit souvent que les deux premières, supposant la troisième assez connue pour pouvoir être omise.

On peut remarquer que, pour éliminer $\cos x$ et $\sin x$ entre les deux équations particulières

$$a \cos x + b \sin x = k,$$
$$a \sin x - b \cos x = l$$

et l'équation sous-entendue

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

il suffit d'ajouter les deux premières membres à membres, après avoir élevé tous leurs membres au carré. C'est là un *artifice* qui réussit admirablement, mais ce n'est qu'un artifice.

1111. Quelle que soit, d'ailleurs, la méthode employée, on devra se rappeler que l'élimination exige beaucoup d'attention; qu'on peut souvent, en l'effectuant sans soin, *supprimer* des facteurs nécessaires, ou *introduire* des facteurs superflus.

### De la symétrie en général.

1112. Tout ce qui précède, sur la façon d'effectuer mécaniquement les calculs, et sur la façon de tenir compte de la symétrie ou dissymétrie, doit être appliqué en Géométrie aussi bien qu'en Algèbre.

1113. Soit à démontrer ce théorème : *La somme des droites qui joignent un point intérieur d'un triangle aux* 3 *sommets est plus petite que le périmètre, mais plus grande que sa moitié.*

Désignant par $\omega$ le point intérieur, par A, B, C les sommets, par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les distances $\omega$A, $\omega$B, $\omega$C, par $a$, $b$, $c$ les longueurs des côtés du triangle, nous écrivons immédiatement les deux systèmes d'inégalités

$$\begin{cases} \beta + \gamma < b + c, \\ \gamma + \alpha < c + a, \\ \alpha + \beta < a + b, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta + \gamma > a, \\ \gamma + \alpha > b, \\ \alpha + \beta > c. \end{cases}$$

En ajoutant membres à membres les inégalités de chaque système,

nous trouvons finalement

$$\alpha + \beta + \gamma < a + b + c, \qquad \alpha + \beta + \gamma > \frac{1}{2}(a + b + c),$$

ce qui démontre notre théorème.

Nous constatons que, dans cette démonstration, les inégalités de chaque système se déduisent les unes des autres par permutations tournantes et, en outre, que tous les éléments entrant *symétriquement* dans la question sont, dans la démonstration, traités *symétriquement*.

1114. Soit à démontrer de même que *la somme des diagonales du quadrilatère* ABCD *est moindre que le périmètre*. Nous avons évidemment

$$\begin{cases} AC < AB + BC, \\ AC < CD + DA, \end{cases} \qquad \begin{cases} BD < BC + CD, \\ BD < DA + AB. \end{cases}$$

En ajoutant membres à membres ces 4 inégalités, et divisant tous les termes par 2, nous trouvons

$$AC + BD < AB + BC + CD + DA,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous pourrions établir que cette même somme des diagonales est supérieure au demi-périmètre. Nous préférons faire remarquer que, pour écrire les inégalités précédentes, nous avons pris successivement chaque diagonale dans les deux triangles auxquels elle appartient. On ne pouvait opérer différemment. Ces deux triangles, *jouant le même rôle*, doivent être *traités de même*.

1115. Tout le monde connaît le *théorème* de Ménélaüs [1] touchant les 6 segments déterminés par une transversale sur les 3 côtés d'un triangle. Soient A, B, C les sommets de ce triangle; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les points où sont coupés les côtés opposés à ces sommets. Le théorème consiste en l'égalité

$$B\alpha . C\beta . A\gamma = C\alpha . A\beta . B\gamma,$$

les segments étant pris en grandeur et en signe. Or cette identité

---

[1] 80 ans après J.-C.

est *symétrique* par rapport aux éléments du triangle; la démonstration devrait donc l'être; d'habitude, elle ne l'est point. Pour la rendre telle, il suffirait d'abaisser, des sommets A, B, C, les perpendiculaires AA′, BB′, CC′ sur la transversale. On trouverait alors, immédiatement,

$$\frac{B\alpha}{C\alpha} = \frac{BB'}{CC'}, \qquad \frac{C\beta}{A\beta} = \frac{CC'}{AA'}, \qquad \frac{A\gamma}{B\gamma} = \frac{AA'}{BB'};$$

et, en multipliant membres à membres,

$$B\alpha . C\beta . A\gamma = C\alpha . A\beta . B\gamma.$$

Il est évident que cette démonstration *symétrique* peut s'étendre au cas d'un polygone plan quelconque coupé par une transversale et, en outre, dans l'espace, au cas d'un polygone quelconque, même gauche, qui serait coupé par un plan.

**1116.** On rencontre, non seulement en Géométrie, mais en Algèbre, en Analyse et dans toutes les parties des Mathématiques, des théorèmes dont les énoncés sont symétriques par rapport aux données et aux résultats. Leurs démonstrations sont le plus souvent dissymétriques : elles devraient être symétriques toujours. Malheureusement, dans une foule de cas, on ne voit pas le moyen d'obtenir cette symétrie.

# CHAPITRE XII.

## VÉRIFICATIONS.

### Nature du résultat.

1117. Quelque problème que l'on résolve, on connaît toujours, par avance, la nature du résultat que l'on cherche.

En certains cas, ce résultat doit être une *relation,* une *équation.* C'est ce qui arrive : quand on cherche un lieu; — quand on intègre une équation différentielle; — quand on élimine des constantes; — quand on élimine des fonctions arbitraires; — ou simplement lorsqu'on cherche l'équation soit aux différentielles, soit aux différences, soit aux différences mêlées qui lie entre eux les éléments entrant dans le problème.

En d'autres cas, on se propose de trouver une *fonction.* C'est ce qui arrive : lorsqu'on cherche une dérivée; — lorsque l'on calcule une intégrale définie ou indéfinie; — lorsque l'on forme un développement en série; — lorsque l'on détermine la fonction génératrice de certains nombres. — On pourrait dire aussi lorsque l'on calcule, à l'aide des données, l'expression de l'inconnue ou des inconnues d'un problème : cette expression n'est, en effet, autre chose qu'une fonction de ces données.

Il se peut enfin que l'on se propose simplement de trouver des *nombres déterminés,* écrits en chiffres, comme on le fait dans la plupart des problèmes usuels de la finance, du commerce ou de l'industrie.

Quel que soit le résultat obtenu, la première des vérifications consiste à voir s'il est bien de la nature prévue; s'il est bien une *relation,* une *fonction* ou un *nombre.* Cette première vérification est, en quelque sorte, immédiate, intuitive : il est presque inutile de la recommander.

### Lieux de points.

1118. On peut prévoir si les points que l'on cherche sont des *points isolés*, ou bien s'ils forment soit une *ligne*, soit une *surface*. Il suffit de voir, en effet, sur la définition qui les donne, s'ils sont déterminés d'eux-mêmes, ou bien si leur position à chaque instant dépend d'une variable ou de deux.

1119. Si les points sont *déterminés* et, par conséquent, en nombre limité, on doit trouver que leurs 3 coordonnées sont données par 3 équations distinctes. S'ils forment une *ligne* dans l'espace, on doit trouver que ces coordonnées sont liées par 2 équations. S'ils forment une *surface*, qu'elles sont liées par une seule. Voilà des *vérifications* immédiates.

Dans le cas, d'ailleurs, où l'on se servirait, pour les lignes et les surfaces, de la représentation paramétrique, on devrait toujours, finalement, trouver 3 relations. Ces relations exprimeraient les coordonnées : de chaque point de la ligne, en fonction d'une seule variable indépendante; de chaque point de la surface, en fonction de deux.

1120. On peut prévoir aussi le *degré* du lieu qu'on cherche. En particulier, dans le cas des lignes planes, on peut souvent déduire ce degré de théorèmes généraux connus, principalement du *théorème de Chasles* sur le lieu décrit par un point remarquable d'un réseau de coniques ayant, pour caractéristiques, les nombres $\mu$ et $\nu$.

1121. On peut prévoir encore que tel ou tel *point*, parfaitement *déterminé*, doit appartenir au lieu cherché.

Si une courbe plane mobile passe constamment par un *point fixe*, il est bien évident que son enveloppe passe par ce point fixe. — Plus généralement, étant données les deux familles de courbes

$$f(x, y; \lambda) = 0, \qquad g(x, y; \lambda) = 0,$$

il est bien évident que, si les courbes constituant l'une d'elles passent constamment par un *certain nombre de points fixes*, le lieu

$$\psi(x, y) = 0,$$

dont l'équation résulte de l'élimination de $\lambda$, passe aussi par tous ces points.

Ces propriétés, comme toutes celles qu'on reconnaît à l'avance, donnent des moyens de *vérification*.

### Des équations.

1122. Dans les problèmes d'application de l'Algèbre à la Géométrie, tout revient, en général, à trouver la valeur d'une certaine *inconnue*, le plus souvent d'une longueur. A chaque solution du problème correspond une valeur de cette inconnue. Comme on peut, par un examen attentif de l'énoncé, déterminer le nombre des *solutions* du problème, on peut savoir, à l'avance, le *degré* de l'équation finale. Si l'équation trouvée n'est point de ce degré, elle est fausse, sinon elle pèche par excès ou par défaut.

1123. Sur les équations purement numériques à une inconnue, on peut connaître à l'avance une ou plusieurs *racines*. Il faudra donc vérifier si les valeurs de ces racines satisfont à l'équation. C'est là une vérification, en quelque sorte brutale, qu'on effectuera par les procédés les plus simples.

La racine *zéro* s'aperçoit immédiatement ainsi que son degré de multiplicité. La racine $+1$ et la racine $-1$ se *voient* presque aussi facilement.

1124. On peut savoir, d'après l'énoncé même du problème, que les racines de l'équation finale sont 2 à 2 *égales* et de *signes contraires*. Cette équation devra donc avoir, par rapport à $x$, tous ses termes de degré pair ou de degré impair.

On peut savoir de même que l'équation finale, n'admettant ni la racine $+1$, ni la racine $-1$, a ses racines 2 à 2 *inverses* l'une de l'autre, c'est-à-dire est *réciproque*. Les coefficients de ses termes équidistants des extrêmes devront donc être égaux et de même signe. Comme dans l'exemple précédent, il suffira de lire l'équation finale pour en effectuer une *vérification*.

1125. Dans les *équations différentielles*, on considère l'ordre

et le degré. Lorsqu'on obtient une telle équation par l'élimination des constantes ou fonctions arbitraires qui figurent dans une équation finie, l'*ordre* de l'équation différentielle peut être facilement prévu : il est égal au nombre des constantes ou fonctions arbitraires qu'il s'agit d'éliminer. Si l'ordre obtenu est supérieur à ce nombre, on s'est forcément trompé. S'il est inférieur, deux cas peuvent se présenter : ou bien les calculs sont erronés; ou bien les constantes ou fonctions arbitraires qui figuraient dans l'équation finie initiale et qui paraissaient distinctes, en réalité ne l'étaient pas.

### Résultats incomplets; surabondants.

1126. Il faut évidemment que la solution d'un problème donne tout ce que l'on cherche et seulement ce que l'on cherche. Elle ne doit rien oublier, rien donner de trop. Elle ne doit être ni *incomplète,* ni *surabondante.*

1127. Dans l'intégration d'une *équation différentielle ordinaire,* on doit trouver autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'ordre de cette équation différentielle. — Dans l'intégration d'une *équation aux dérivées partielles,* on doit trouver ce même nombre de fonctions arbitraires, ou bien obtenir des intégrales complètes formant un système équivalent à l'intégrale contenant toutes ces fonctions arbitraires. — Peut-être même ne devrait-on regarder le problème comme complètement résolu qu'après avoir obtenu, en même temps que les *intégrales générales,* toutes les *intégrales singulières* qui peuvent exister?

1128. Dans le calcul algébrique, il arrive très souvent, soit lorsqu'on réduit différents termes au même *dénominateur,* soit lorsqu'on effectue certaines *éliminations,* que l'on supprime des facteurs nécessaires ou que l'on introduise des facteurs étrangers. Ce n'est qu'en calculant avec la plus grande attention que l'on évite ces deux sortes d'erreurs.

On *supprime* des facteurs nécessaires lorsqu'on divise les deux membres de l'équation étudiée par un ou plusieurs facteurs contenant les variables. — Supposons que l'on cherche le lieu des points

du plan dont les polaires par rapport à l'ellipse et au cercle concentrique,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1,$$

sont parallèles. On trouve que ce lieu a pour équation

$$xy = 0$$

et, par conséquent, se compose des deux axes de symétrie de l'ellipse. Si par inadvertance, dans le cours du calcul, on eût tout divisé par $x$ et $y$, on fût arrivé à une équation absurde, qui n'eût rien donné.

L'*introduction* d'un facteur étranger dans une équation à une inconnue ajoute aux racines de cette équation une ou plusieurs racines étrangères. Dans l'équation d'un lieu plan, cette introduction associe au lieu cherché un lieu nouveau, tout à fait étranger à la question.

1129. Il ne faut point confondre avec ces lieux étrangers ceux que le calcul le plus correct apporte dans la solution des problèmes. — Lorsque l'on cherche le lieu des projections d'un point intérieur à une ellipse sur les tangentes à cette ellipse, on trouve, comme faisant partie du lieu, le point intérieur lui-même. La présence de ce point s'explique à l'aide des *tangentes imaginaires* que l'on peut mener par lui à l'ellipse. — Il en est de même de la présence si fréquente, dans l'équation finale, du système des directions asymptotiques du cercle, du système de ce qu'on appelle les *droites isotropes*.

1130. On obtient souvent, sans qu'on ait fait aucune faute de calcul, à la place du lieu demandé, un lieu *plus vaste* dont le premier n'est qu'une partie.

Le lieu des milieux des cordes d'une ellipse qui sont parallèles à une direction donnée ne se compose évidemment que de la portion du diamètre conjugué qui est intérieure à l'ellipse. Pourquoi le calcul nous donne-t-il ce diamètre tout entier? Parce qu'une corde qui ne rencontre pas l'ellipse la coupe, analytiquement, en deux points dont les coordonnées sont imaginaires conjuguées, et

que, par suite, le milieu de cette corde a ses coordonnées réelles, est un point réel.

1131. Lorsqu'un petit cercle d'une sphère tourne autour d'un diamètre de cette surface, il engendre évidemment une zone; le calcul donne la sphère tout entière. — Lorsqu'un segment de droite tourne autour d'un axe qui lui est parallèle, il engendre une portion de surface cylindrique : le calcul donne la surface indéfinie.

Ce dernier résultat s'explique par ce fait qu'on ne saurait exprimer par une équation *une portion* d'une ligne donnée. L'équation exprime toujours cette ligne tout entière. Il faudrait, pour la réduire à n'en représenter qu'une partie, lui associer une ou plusieurs *inégalités*.

1132. Quoi qu'il en soit, en vérifiant le résultat final, il faudra toujours voir s'il est incomplet ou surabondant, et, dans le cas où il le serait, chercher les causes qui le rendent tel.

### Valeurs numériques.

1133. Les valeurs numériques que l'on obtient pour les inconnues se vérifient, comme nous l'avons dit (1123), d'une façon brutale. Il suffit de les porter dans l'équation considérée, et d'effectuer les calculs. Mais, dans beaucoup de cas, on peut *prévoir* que ces valeurs numériques satisferont à certaines conditions, posséderont certaines propriétés.

1134. Supposons qu'un problème, dont la résolution dépend d'une seule inconnue, soit démontré possible. L'équation numérique qui donnera cette inconnue aura, au moins, *une racine réelle*. — Supposons que cette inconnue doive admettre deux valeurs de sens contraires : cette équation devra avoir, au moins, *une racine réelle positive* et *une racine réelle négative*. — Supposons que les nombres cherchés doivent, d'après l'énoncé, être les carrés de nombres réels : l'équation qui les donnera devra avoir des racines réelles *positives*.

1135. Dans certains cas, la valeur numérique de l'inconnue doit être un *nombre entier*. C'est ce qui arrive quand on cherche, par exemple, le nombre des soldats d'un régiment, celui des moutons d'un troupeau, celui des termes d'un polynome.

Il peut arriver aussi que la valeur de l'inconnue doive être *comprise* entre certaines limites. Si cette inconnue, par exemple, est un sinus ou un cosinus, sa valeur numérique devra être comprise entre $-1$ et $+1$. Si elle est une probabilité, sa valeur numérique devra être positive et inférieure à l'unité.

Dans les problèmes usuels, où la quantité inconnue s'exprime par un nombre décimal, il sera toujours bon de se faire directement, par le simple bon sens, une idée approximative de la grandeur du résultat. Ce sera le moyen de mettre, dans le nombre décimal trouvé, la virgule exactement à sa place. Nulle faute n'est plus grossière, ni plus commune, que celle qui consiste à la mal placer.

## Formules.

1136. Dans sa signification la plus commune, le mot *formule* indique l'égalité qui exprime l'inconnue d'un problème à l'aide de ses données, qui fait connaître les opérations à effectuer sur celles-ci pour trouver celle-là. Il est, en quelque sorte, synonyme de *règle*. Les divers sens qu'on lui donne tiennent tous de cette première acception.

1137. On sait que l'introduction des nombres négatifs, des nombres incommensurables, des nombres imaginaires a permis de donner aux formules une *généralité absolue*.

Il est, en outre, évident qu'une formule qui lie entre elles $n$ quantités donne le moyen de *résoudre n problèmes*, parmi lesquels figure celui en vue duquel on l'a en particulier établie. — La formule

$$i = art$$

des intérêts simples, qui renferme 4 quantités, donne ainsi le moyen de résoudre 4 problèmes.

Bien plus, l'analogie des formules qui se rapportent à des questions très diverses, l'*analogie*, par exemple, des équations qui

régissent, en Physique, des phénomènes d'ordres très différents, nous rend manifeste une analogie correspondante entre ces différentes questions, ces différents phénomènes.

1138. Lorsqu'un problème nous présente plusieurs inconnues, si ces inconnues y jouent le *même rôle,* les formules qui les donnent doivent être *pareilles*. Nous avons fait remarquer, par exemple (1067), que, si un système d'équations ne change point quand on y effectue certaines permutations circulaires, les expressions des différentes inconnues doivent se déduire les unes des autres par les mêmes permutations. C'est là une première *vérification*. Pour obtenir une vérification complète, il faudrait porter, dans les équations du problème, les expressions trouvées pour les inconnues, puis effectuer tous les calculs.

1139. L'examen attentif de l'énoncé d'un problème nous permet souvent de prévoir certaines propriétés des formules finales, qui pourront aussi servir de *vérification*. De même l'étude d'une fonction dont on cherche soit la dérivée, soit le développement peut nous fournir des *renseignements* sur les résultats qu'on cherche.

On voit ainsi que la dérivée de $\sin x$ doit pouvoir changer de signe, tandis que celle de $\operatorname{tang} x$ doit être constamment positive. On voit de même que le développement de $\operatorname{tang} x$ suivant les puissances ascendantes de $x$ ne doit contenir que des puissances impaires de cette variable, tandis que celui de $\operatorname{séc} x$ n'en doit contenir que des puissances paires.

1140. Comme nous l'avons déjà dit (1049), les considérations d'*homogénéité* et de *symétrie* fournissent des moyens de *vérification* qui subsistent pendant tout le cours des calculs. Nous examinerons et étudierons bientôt ces différents moyens.

### Lettres qui doivent disparaître.

1141. Sans recourir aux considérations de symétrie ni d'homogénéité, on peut prévoir certaines particularités de structure touchant les formules finales. On peut prévoir, par exemple, que telle

lettre isolée, ou tel groupe de lettres, ne doit *point figurer* dans ces formules.

1142. Lorsqu'on cherche les expressions de $\sin mx$ et $\cos mx$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$, on part de la formule de Moivre, laquelle contient l'imaginaire $i$. N'est-il pas évident que cette imaginaire ne doit *point figurer* dans les derniers résultats?

Soit à intégrer la différentielle $e^{-x}\sin x\,dx$. Le moyen le plus simple pour en calculer l'intégrale, c'est d'y remplacer $\sin x$ par son expression en fonction des exponentielles $e^{ix}$ et $e^{-ix}$. Ces exponentielles contiennent l'imaginaire $i$. N'est-il pas évident que cette imaginaire, pas plus que dans l'exemple précédent, ne *doit figurer* dans l'expression finale?

1143. Pour calculer, en Cinématique, dans le mouvement d'un point, la vitesse et les diverses accélérations, le procédé le plus commode consiste à se servir des formules qui donnent, sur chaque axe de coordonnées, le mouvement de la projection de ce point. C'est, par exemple, à l'aide de ces formules qu'on obtient la résultante de plusieurs vitesses. N'est-il pas évident encore que l'expression de cette *vitesse résultante* ne doit dépendre que des *vitesses composantes* et des *angles* qu'elles forment entre elles; doit être, par conséquent, indépendante de toutes *coordonnées?*

Dans une foule de questions, d'ailleurs, les coordonnées, quelles qu'elles soient, ne remplissent, pour résoudre ces questions, que le rôle des *échafaudages* qui servent à construire un *édifice*. Une fois achevées la construction de l'édifice et la résolution de la question, échafaudages et coordonnées doivent également disparaître.

### Homogénéité géométrique.

1144. *On ne peut égaler entre elles que des quantités de même nature :* des longueurs à des longueurs, des superficies à des superficies, des volumes à des volumes. C'est là, avons-nous dit (1046), l'origine et la raison de l'homogénéité proprement dite, de celle qu'on envisage en Géométrie.

Mais une homogénéité toute pareille se rencontre aussi en Méca-

nique, en Physique, en Chimie et, en général, dans toutes les sciences touchant au concret. On ne peut égaler des vitesses qu'à des vitesses, des températures qu'à des températures, des poids qu'à des poids. Cette homogénéité s'appelle souvent homogénéité de *dimensions*. Nous la comprenons aussi sous le nom d'*homogénéité géométrique*, qui est pour nous, dans les questions concrètes, une dénomination tout à fait générale.

1145. Les considérations d'homogénéité nous fournissent des moyens de *vérification* applicables, pendant le *cours entier* du calcul, à toutes les équations et, en dernier lieu, aux expressions des inconnues.

Il faut se rappeler que les longueurs doivent être regardées comme du premier degré; les superficies comme du deuxième; les volumes comme du troisième. — Les nombres, exprimant les rapports de quantités de même nature, sont forcément du degré zéro. C'est ce qui a lieu, puisque ce sont des nombres, pour les arcs figurant en Trigonométrie, et pour toutes leurs lignes trigonométriques.

1146. Dans le plan, en coordonnées rectilignes, $x$ et $y$ sont des longueurs. Il s'ensuit que les dérivées

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots$$

sont respectivement des degrés 0, — 1, — 2, .... — En coordonnées polaires, $r$ est une longueur, $\theta$ est un angle. Donc les dérivées

$$\frac{dr}{d\theta}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2}, \quad \frac{d^3r}{d\theta^2}, \quad \ldots$$

sont toutes du premier degré. — Si l'on considère à la fois les coordonnées rectilignes et les coordonnées polaires liées entre elles par les équations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

les dérivées partielles

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

sont : les deux premières du degré zéro, les deux suivantes du degré — 1.

**1147.** Il est évident, *a priori,* que certaines formules doivent être *homogènes* par rapport à certaines lettres. La formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

qui donne la durée de l'oscillation du pendule simple, doit être homogène par rapport aux lettres $l$ et $g$, puisque les nombres représentés par ces lettres varient proportionnellement lorsqu'on vient à changer l'unité de longueur.

**1148.** Non seulement les formules finales doivent être *homogènes,* mais il est nécessaire de les écrire de façon à en rendre l'*homogénéité manifeste.*

La quantité cherchée figurant seule au premier membre, on écrira d'abord au second la quantité de même nature qu'elle, puis les facteurs forcément du degré zéro qui la multiplient. On écrira ainsi, à l'aide des notations ordinaires de la Trigonométrie rectiligne,

$$S = \frac{a^2}{2} \frac{\sin B \sin C}{\sin A}, \qquad S = \frac{bc}{2} \sin A,$$

$$c = a \frac{\sin C}{\sin A}, \qquad a = p \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)}.$$

Il serait mauvais d'écrire, par exemple,

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Il est évident, d'ailleurs, qu'on devra écrire de même le résultat d'une *règle de trois* quelconque, simple ou composée.

### Homogénéité algébrique.

**1149.** Une forme composée de plusieurs variables et de degré donné n'est autre chose qu'un polynome entier dont tous les termes

sont de ce degré par rapport à ces variables. Si chacune de ces variables représente une longueur et si tous les coefficients sont des nombres, ce polynome possède l'homogénéité dont nous venons de parler, l'*homogénéité géométrique*. Mais, si ce polynome se présente dans une question qui n'ait rien de concret, l'homogénéité qu'il nous offre est purement *algébrique*.

1150. Considérons l'équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0.$$

En chacun de ses termes, l'indice et l'exposant ont une somme constante. C'est là une homogénéité qui paraît *algébrique*. Si l'on se rappelle les relations qui existent, en toute équation de cette forme, entre les coefficients et les racines, on voit que chaque coefficient est une fonction homogène de toutes ces racines, dont le degré est marqué par l'indice. Ce degré est ce qu'on appelle le *poids* de cette fonction. Aussi peut-on dire que l'homogénéité présentée par l'équation considérée est une *homogénéité de poids*.

Cette notion du poids s'étend, d'ailleurs, comme on le sait, à toutes les fonctions symétriques des racines de l'équation, ou plutôt à toutes les fonctions symétriques de plusieurs quantités.

1151. Toute fonction symétrique, rationnelle et entière des racines d'une équation s'exprime, on le démontre, par une fraction rationnelle, qui a pour dénominateur une puissance de $A_0$, et pour numérateur une fonction rationnelle et entière des coefficients A, dont le poids est juste égal au poids de la fonction symétrique à évaluer. C'est là évidemment, pour la formule qui nous donne cette évaluation, un moyen simple et immédiat de *vérification*.

On peut en déduire une conséquence remarquable pour la composition de cette formule à l'aide des coefficients A. Si la fonction symétrique considérée est de degré $p$, la formule qui nous la donne ne peut pas contenir de coefficient A dont l'indice dépasse $p$. La somme des quatrièmes puissances des racines d'une équation algébrique de degré supérieur à 4 s'exprimera donc à l'aide seulement des 5 coefficients $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Si elle nous en présentait quelque autre, elle serait erronée.

1152. L'homogénéité que nous venons de considérer pourrait, comme nous l'avons déjà dit, se nommer *homogénéité de poids*. Nous l'appellerons simplement *homogénéité algébrique*.

1153. Des considérations d'homogénéité algébrique nous permettent souvent de dire que certaines formules *ne possèdent point* les propriétés qu'on leur attribue. Supposons qu'on nous affirme que l'égalité

$$f\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{a-c}{b-d}$$

est une identité. Nous pouvons aussitôt le nier. Le premier membre, en effet, est homogène en $a$ et $b$, tandis que le second ne l'est pas.

### Homogénéité d'infinitude.

1154. Quand le premier membre d'une équation est fini, le second membre doit l'être. Quand le premier est un infiniment petit ou un infiniment grand, le second doit être un infiniment petit ou un infiniment grand du *même degré d'infinitude*. C'est en ce fait que consiste ce que j'appelle précisément l'*homogénéité d'infinitude*.

1155. Une dérivée est, par définition, une quantité finie. Une différentielle, une quantité infiniment petite. — Si $y$ est une fonction de $x$, les dérivées successives $y'$, $y''$, $y'''$, ... sont des quantités finies. — Si $dx$ est l'infiniment petit principal, $dy$, $d^2y$, $d^3y$, ... sont des infiniment petits ayant respectivement, pour degrés d'infinitude, les nombres 1, 2, 3, ....

Lorsque l'on prend les dérivées sous forme de quotients

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots$$

il est rare que l'on fasse, en écrivant, des fautes contre l'homogénéité qui nous occupe. — Lorsqu'on les désigne par $y'$, $y''$, $y'''$, ..., ces fautes se rencontrent. J'ai vu souvent des égalités telles que celle-ci,

$$y' = f(x)\,dx.$$

dont le premier membre est *fini*, et le second *infiniment petit*.

1156. *Toute formule, qui nous présente des infiniment petits, doit être vérifiée au point de vue de l'homogénéité d'infinitude*, non moins qu'au point de vue de l'homogénéité géométrique ou algébrique. Toute formule de cette sorte donnera donc lieu, au seul point de vue de l'homogénéité, à *deux sortes de vérifications*.

1157. Soit la formule

$$\frac{1}{T} = \frac{\delta}{A^2 - B^2 - C^2},$$

qui nous donne le rayon de torsion T au point $x$, $y$, $z$ d'une courbe gauche.

Son premier membre, au point de vue géométrique, est du degré $-1$. Son second membre doit l'être aussi. Et il l'est, en effet, comme on le voit immédiatement lorsqu'on se rappelle que l'on a

$$\delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix},$$

$$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \qquad B = dz\,d^2x - dx\,d^2z, \qquad C = dx\,d^2y - dy\,d^2x.$$

Au point de vue de l'infinitude, son premier membre est fini, c'est-à-dire est du degré zéro. Le numérateur et le dénominateur de son second membre doivent donc nous présenter le même degré d'infinitude. Or c'est ce qui a lieu, puisqu'ils sont l'un et l'autre des infiniment petits du sixième ordre.

Il est bien évident que ces *deux modes de vérification* s'appliqueraient aussi, et d'une façon beaucoup plus simple, à la formule si connue qui nous donne, pour une courbe plane, le rayon de courbure en un point.

### Variables indépendantes et fonctions.

1158. Les variables entrant dans une question quelconque sont évidemment de deux sortes. Les unes ne dépendent que de nous, c'est-à-dire peuvent prendre toutes les valeurs que nous voulons : ce sont les variables *indépendantes*. Les autres ne le peuvent point,

leurs valeurs sont déterminées par celles des premières : ce sont les *fonctions*.

Nous pouvons évidemment choisir à volonté les variables indépendantes et par suite les fonctions. Après les avoir choisies, nous pouvons les changer. Le problème constitué par ce changement peut se présenter à nous sous différents aspects. Nous pouvons, en effet, suivant la question, considérer une ou plusieurs fonctions, une ou plusieurs variables indépendantes; changer seulement les variables indépendantes ou changer à la fois les variables et les fonctions. Ce qui nous intéresse présentement, c'est que ces changements divers nous fournissent, en certains cas, des moyens commodes de *vérification*.

1159. Pour en montrer un exemple, considérons les coordonnées $x$, $y$ du point qui décrit une courbe plane. Nous pouvons regarder $x$ et $y$ *comme fonctions d'une variable indépendante* quelconque $t$ et en désigner par $dx$, $dy$, $d^2x$, $d^2y$ les différentielles des deux premiers ordres. Nous pouvons, au contraire, *prendre $x$ comme variable indépendante,* regarder $y$ comme *fonction* de $x$ et en désigner les deux premières dérivées par $y'$ et $y''$.

Soit maintenant l'expression donnée

$$f(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y),$$

où $x$ et $y$ sont *fonctions de $t$*. Pour obtenir ce qu'elle devient lorsqu'on prend $x$ pour variable indépendante, il suffit d'y remplacer

$$dy, \quad d^2x, \quad d^2y$$

respectivement par

$$y'\,dx, \quad 0, \quad y''\,dx^2,$$

ce qui nous donne

$$f(x, y, dx, y'\,dx, 0, y''\,dx^2).$$

Or, si l'on part de cette nouvelle expression, et que l'on veuille revenir au cas où la *variable indépendante est quelconque,* il faut, comme on le démontre, remplacer dans cette nouvelle expression

$$y' \quad \text{et} \quad y''$$

respectivement par

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}.$$

Cette substitution nous donne

$$f\left(x, y, dx, dy, 0, \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}\right).$$

Cette dernière expression doit donc être *identique* à notre expression *initiale*. Si elle ne l'est point, cette expression initiale est fausse, ou plutôt est une expression qui ne peut exister.

**1160.** Ainsi, ce mode de *vérification* nous permet de rejeter certaines expressions comme tout à fait impossibles. Supposons que, par inadvertance ou défaut de mémoire, nous écrivions sous la forme

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y + 2\, dy\, d^2x}$$

l'égalité qui donne, lorsque la variable indépendante est *quelconque*, le rayon de courbure au point $x$, $y$ d'une courbe plane. En prenant $x$ pour *variable indépendante*, nous déduisons de là

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

En partant de ce résultat et revenant au cas où la variable indépendante est quelconque, nous obtenons l'égalité

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x},$$

qui n'est point *identique* à notre égalité initiale. Cette égalité initiale est donc *fausse* ou plutôt *impossible*.

**1161.** Il suit de ces diverses considérations que les expressions provenant soit du calcul infinitésimal proprement dit, soit de ses applications géométriques, ne sont point toujours des expressions quelconques, pouvant être prises arbitrairement. Dans l'exemple simple que nous avons donné, il faut, pour que l'expression

$$f(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y)$$

soit possible, qu'elle satisfasse à une certaine identité. Dans les cas

plus compliqués, il faudrait que d'autres identités fussent vérifiées de même. Ces identités de condition seraient intéressantes à connaître. Peut-être ne les a-t-on pas encore cherchées.

### Symétrie et dissymétrie.

1162. *Dans les problèmes qui comportent plusieurs données, si ces données sont d'une seule sorte et que l'inconnue dépende de chacune d'elles de la même manière, son expression doit être symétrique par rapport à elles.*

Ainsi, en Trigonométrie rectiligne, pour un triangle quelconque, l'expression du périmètre, celle du rayon du cercle inscrit, celle du rayon du cercle circonscrit doivent être chacune des fonctions symétriques des trois côtés. — Et de même, en Trigonométrie sphérique, la surface doit être une fonction symétrique des trois angles.

D'ailleurs, comme nous l'avons déjà fait remarquer, une telle formule symétrique est toujours, forcément, une formule *unique*. C'est ce qui arrive, dans les triangles rectilignes, pour la formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où S désigne la surface; $p$, le demi-périmètre; $a$, $b$, $c$, les 3 côtés.

1163. Quand on considère en même temps des données de deux sortes, par exemple les côtés et les angles d'un triangle rectiligne quelconque, la formule qui donne la surface de ce triangle, si elle contient des éléments de la première sorte et des éléments de la seconde, ne sera plus symétrique par rapport à tous les éléments d'une même sorte. On aura, par exemple,

$$S = \frac{bc}{2} \sin A.$$

Seulement, dans ce cas, cette formule ne sera plus une formule *unique*, on aura à la fois

$$S = \frac{bc}{2} \sin A, \qquad S = \frac{ca}{2} \sin B, \qquad S = \frac{ab}{2} \sin C,$$

et ce sera le *système* de ces 3 formules qui sera symétrique par rapport à chaque sorte de données.

1164. *Lorsque l'inconnue n'est point symétrique par rapport à toutes les données d'une même sorte, son expression à l'aide de ces données ne doit point l'être.* L'expression d'une hauteur d'un triangle, celle d'une médiane, celle du rayon d'un des cercles exinscrits ne doit point être symétrique par rapport aux 3 côtés. Il serait absurde qu'elle le fût.

Mais on en peut prévoir la *composition dissymétrique*. L'expression de la médiane qui part du sommet A doit être symétrique par rapport aux côtés $b$ et $c$ qui partent du même sommet, et contenir $a$ d'une façon particulière. Il en est de même pour la hauteur qui part du sommet A, et pour le rayon du cercle exinscrit opposé à ce sommet.

1165. De même encore, toute formule donnant l'angle A en fonction des côtés doit être *symétrique* en $b$ et $c$ et contenir $a$ d'une *manière spéciale*. C'est ce qui a lieu pour

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

qui est la formule exacte. — Si l'on nous donnait, pour calculer A, l'une ou l'autre des formules suivantes,

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}}, \qquad \operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}},$$

nous pourrions dire, à simple vue, que chacune de ces formules est erronée : la première, comme étant *symétrique* par rapport aux trois côtés ; la seconde, comme nous présentant, par rapport à eux, une *fausse dissymétrie*.

## Résumé.

1166. Si nombreux que soient les modes de *vérifications* qui précèdent, ce ne sont pas les seuls. On pourrait trouver d'autres *homogénéités, d'autres symétries* ou *dissymétries;* on pourrait en Géométrie, même dans l'espace, tenir compte des signes des segments et des angles ; en Analyse combinatoire, faire attention à l'ordre qu'on suppose ou ne suppose pas entre les éléments des

groupes; en Analyse et en Algèbre, se livrer à une multitude de considérations qui tiennent à la nature des problèmes et qu'on ne saurait toutes énumérer.

D'une manière générale, chaque propriété tirée de l'énoncé du problème permet de prévoir une propriété correspondante, non seulement du résultat final, mais de toutes les équations qui y conduisent, de toutes les expressions, de tous les calculs; permet, par conséquent, d'effectuer, pendant le cours entier de l'opération, de la recherche, *une suite pour ainsi dire ininterrompue de vérifications*.

Ce sont les *notations bien choisies* qui expriment, dès le début, ces propriétés tirées de l'*énoncé* et tenant à la *nature du problème*. Ce sont elles qui nous les rappellent pendant tout le cours et jusqu'à la fin des raisonnements ou calculs. Ces notations doivent donc mettre ces propriétés en évidence, les y mettre toutes, les y mettre fidèlement. Comme nous l'avons dit dans notre discours préliminaire, ce que nous devons chercher toujours, avant tout, c'est la *vérité des notations*.

FIN

# TABLE DES MATIÈRES.

## DISCOURS PRÉLIMINAIRE.


Pages.

Définition des notations mathématiques ..... V
Remarques historiques ..... V
Premiers avantages des notations ..... VI
Extensions et généralisations ..... VIII
Mécanisme algébrique ..... X
Éloges et critiques ..... XIII
Grands écrivains en Mathématiques ..... XV
Objet et but du présent Ouvrage ..... XVI


## PREMIÈRE PARTIE.

### ÉNUMÉRATION.


N°

1. Idée et plan de la première Partie ..... 1


## CHAPITRE I.

### NOMBRES ENTIERS.


2. Chiffres ..... 2
5. Numération écrite ..... 3
8. Base de la numération ..... 3
13. Supériorité de la numération écrite ..... 5
15. Avantages de la numération écrite ..... 6
19. Nécessité de bien écrire les nombres ..... 7
20. Chiffres isolés ..... 8
22. Chiffres réunis ..... 9
24. Du retournement ..... 9
25. Des vides ..... 10
29. Disposition à donner aux nombres ..... 11
32. Nombres écrits en toutes lettres ..... 12

## CHAPITRE II.

### FRACTIONS.


| N° | | Pages. |
|---|---|---|
| 35. | Généralités | 14 |
| 39. | Écriture et lecture des fractions | 15 |
| 42. | Barre de fraction | 15 |
| 44. | Barre en biais | 16 |
| 47. | Fractions équivalentes | 17 |
| 49. | Nombres décimaux | 18 |
| 52. | Groupement des décimales | 18 |
| 55. | Fautes d'écriture | 19 |
| 57. | Usage des zéros | 20 |
| 60. | Usage des puissances de 10 | 22 |
| 64. | Nombres dans le texte | 23 |
| 67. | Incommensurables | 24 |


## CHAPITRE III.

### QUANTITÉS DÉTERMINÉES.


| | | |
|---|---|---|
| 70. | Généralités | 26 |
| 71. | Quantités discontinues | 26 |
| 72. | Quantités continues usuelles | 27 |
| 75. | Abréviations dans le système métrique | 27 |
| 80. | Remarques sur les abréviations | 28 |
| 83. | Durées | 30 |
| 87. | Angles | 31 |
| 89. | Angles et durées | 32 |
| 93. | Autres quantités | 33 |
| 96. | Manières d'écrire | 35 |
| 100. | Préceptes divers | 37 |
| 103. | Nombres approchés | 38 |


## CHAPITRE IV.

### NOMBRES INDÉTERMINÉS.


| | | |
|---|---|---|
| 106. | Usage des lettres | 40 |
| 108. | Lettres employées | 40 |
| 109. | Caractères simples et distincts | 41 |
| 111. | Lettres que l'on confond | 41 |
| 114. | Menus détails | 42 |
| 116. | Lettres à formes multiples | 43 |
| 119. | Variétés d'un alphabet | 44 |
| 126. | Systèmes simultanés | 45 |
| 130. | Variétés usitées | 47 |
| 132. | Alphabets hébreu, gothique, russe | 48 |
| 136. | Accents et indices | 49 |
| 141. | Indices nombreux ou compliqués | 51 |

## CHAPITRE V.

### SIGNES D'OPÉRATIONS.


| N° | | Pages. |
|---|---|---|
| 144. | Les sept opérations fondamentales | 53 |
| 145. | Signes + et — | 53 |
| 149. | Nombres positifs et négatifs | 54 |
| 153. | Signes de la multiplication | 55 |
| 158. | Suppression du signe × | 57 |
| 162. | Signes de la division | 58 |
| 165. | Signe de la puissance | 60 |
| 168. | Opérations inverses de la puissance | 61 |
| 169. | Signe de la racine | 61 |
| 173. | Exposants divers | 62 |
| 176. | La septième opération | 63 |


## CHAPITRE VI.

### SIGNES DE COORDINATION.


| | | |
|---|---|---|
| 179. | Préambule | 65 |
| 180. | Signes de groupement | 65 |
| 184. | Signes de groupement superposés | 67 |
| 192. | Suppression des signes de groupement | 69 |
| 196. | Signes de séparation | 70 |
| 201. | Autres signes de séparation | 72 |
| 206. | Signes de correspondance | 74 |
| 212. | Résumé | 76 |


## CHAPITRE VII.

### SIGNES DE FONCTIONS.


| | | |
|---|---|---|
| 213. | Notion de fonction | 77 |
| 214. | Fonctions explicites | 77 |
| 216. | Variantes | 78 |
| 220. | Fonctions indéterminées | 80 |
| 224. | Fonctions déterminées | 82 |
| 226. | Caractéristiques des fonctions | 83 |
| 230. | Nombre dépendant d'un autre | 85 |
| 233. | Fonction dépendant d'une autre | 87 |
| 239. | Valeurs particulières des fonctions | 90 |
| 244. | Fonctions inverses | 92 |


## CHAPITRE VIII.

### SIGNES DE RELATIONS.


| | | |
|---|---|---|
| 246. | Diverses sortes | 94 |
| 247. | Signe = | 94 |

N°. Pages.
250. Signe d'identité ..... 96
253. Signe de congruence ..... 97
256. Signes d'équipollence et d'équivalence ..... 98
259. Signes d'inégalité proprement dits ..... 98
262. Signes négatifs de relation ..... 99
264. Signes doubles de relation ..... 100
269. Sur les relations mathématiques ..... 102

## CHAPITRE IX.

### NOTATIONS DE LA GÉOMÉTRIE.

271. Objets de la Géométrie ..... 104
273. Figures planes rectilignes ..... 104
276. Figures planes curvilignes ..... 106
277. Figures polyédriques ..... 106
280. Figures courbes dans l'espace ..... 108
282. Des projections en général ..... 108
285. Géométrie descriptive ..... 110
291. Lettres sur les figures ..... 112
294. Géométrie sans figure ..... 113

## CHAPITRE X.

### SIGNES DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

297. Coordonnées ..... 115
300. Généralités sur les coordonnées ..... 117
304. Des lettres en Géométrie analytique ..... 118
307. Points; coefficients directeurs ..... 119
309. Équations de la Géométrie analytique ..... 120
315. Hyperespaces ..... 123
318. Représentation intrinsèque des courbes ..... 125
320. Géométries analytiques sans coordonnées ..... 126

## CHAPITRE XI.

### MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

325. Stéréotomie et charpente ..... 128
326. Édifices, meubles, machines ..... 128
329. Géométrie cotée ..... 130
332. Topographie ..... 130
336. Géodésie ..... 132
340. Astronomie ..... 134
346. Mécanique ..... 136
353. Physique, Chimie, Histoire naturelle ..... 139

## CHAPITRE XII.

### SIGNES DE RÉDACTION.

Nos. Pages.
358. Divisions d'un Ouvrage ou Mémoire ..... 142
361. Tables et titres courants ..... 143
364. Appels de notes ..... 144
367. Renvoi à un paragraphe ..... 145
369. Texte et figures ..... 146
375. Texte et calculs ..... 148
379. Mots très fréquents ..... 149
383. Pasigraphie mathématique ..... 151

---

# DEUXIÈME PARTIE.

### CHOIX.

385. Idée et plan de la deuxième Partie ..... 153

## CHAPITRE I.

### NETTETÉ DU SIGNE.

386. Définition de la netteté ..... 154
387. Visibilité du signe ..... 154
389. Forme du signe ..... 155
392. Position et orientation ..... 156
394. Positions relatives ..... 156
396. Assemblage des éléments ..... 158
399. Brièveté du signe ..... 158
402. Signes compliqués ..... 160
406. Immuabilité du signe ..... 161
410. Signes assimilables ..... 162

## CHAPITRE II.

### PRÉCISION DU SIGNE.

413. Définition de la précision ..... 164
414. Différence de deux signes ..... 164
419. Première règle fondamentale ..... 166
422. Notation des dérivées ..... 168
425. Seconde règle fondamentale ..... 170
429. Signes équivalents ..... 171
432. Initiales mnémoniques ..... 172

## CHAPITRE III.

### RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DE L'OBJET.

N°s. Pages.
437. Nécessité de ce rappel ..... 176
438. Rappel direct ..... 176
441. Signe d'un objet simple ..... 177
444. Signe d'un objet complexe ..... 178
447. Structure ..... 179
451. Symétrie et dissymétrie ..... 180
454. Objet regardé comme simple, comme complexe ..... 181
458. Rappels nécessaires ..... 183
461. Rappels superflus ..... 184

## CHAPITRE IV.

### RAPPEL DES RAPPORTS ENTRE LES OBJETS.

465. Généralités ..... 187
466. Objets analogues; objets disparates ..... 187
469. Signes analogues; signes disparates ..... 188
473. Sortes d'objets ..... 190
476. Sortes de signes ..... 191
482. Correspondances entre les sortes ..... 192
486. Représentation des sortes d'objets ..... 193
490. Représentation des correspondances ..... 195
494. Méthode à suivre ..... 197

## CHAPITRE V.

### CHOIX DES SIGNES GÉNÉRAUX.

497. Les deux grandes espèces de signes mathématiques ..... 199
499. Choix des signes numériques ..... 200
504. Choix des signes d'opérations ..... 201
507. Choix des signes de coordination ..... 202
512. Signes de fonctions ..... 204
516. Signes de relations ..... 205
519. Signes de rédaction ..... 206
523. Résumé ..... 207

## CHAPITRE VI.

### MESURE DES QUANTITÉS.

526. Définitions précises ..... 209
531. Sur les abréviations ..... 210
534. Erreurs courantes ..... 211
537. Signes comparables ..... 212
541. Quantités correspondantes ..... 214
545. Grandeur de l'unité ..... 216

## CHAPITRE VII.

OBJETS D'UNE SEULE SORTE, EN NOMBRE DÉTERMINÉ.


| Nos | | Pages. |
|---|---|---|
| 550. | Règle | 219 |
| 553. | Bonnes notations de deux objets analogues | 219 |
| 556. | Nouvelles bonnes notations de deux objets | 221 |
| 559. | Mauvaises notations de deux objets analogues | 222 |
| 562. | Nouvelles mauvaises notations de deux objets | 223 |
| 564. | Autres mauvaises notations de deux objets | 224 |
| 567. | Remarques sur nos règles | 224 |
| 568. | Objets d'une même sorte, en nombre déterminé | 225 |
| 570. | Usage des accents | 226 |
| 573. | Usage des indices | 226 |
| 576. | Usage des numéros | 228 |


## CHAPITRE VIII.

OBJETS D'UNE MÊME SORTE, EN NOMBRE INDÉTERMINÉ.


| | | |
|---|---|---|
| 578. | $n$ objets d'une même sorte | 229 |
| 584. | Suite limitée ou illimitée | 231 |
| 588. | Objets en suite linéaire | 232 |
| 590. | Suites fermées | 233 |
| 593. | Combinaisons | 234 |
| 597. | Ordre introduit parmi les objets | 236 |


## CHAPITRE IX.

OBJETS DE DEUX SORTES.


| | | |
|---|---|---|
| 601. | Deux objets disparates | 238 |
| 603. | Majuscules et minuscules | 239 |
| 607. | Accents et indices | 240 |
| 610. | Cas singuliers | 241 |
| 614. | Deux objets d'une sorte, un de l'autre | 243 |
| 620. | $n$ objets d'une sorte, un de l'autre | 246 |
| 624. | $p$ objets d'une sorte, $q$ de l'autre | 248 |


## CHAPITRE X.

CORRESPONDANCES ENTRE DEUX SORTES DE SIGNES.


| | | |
|---|---|---|
| 626. | Idée du Chapitre | 250 |
| 628. | Correspondances entre un objet et plusieurs objets | 250 |
| 632. | Objet placé à la tête d'une suite | 251 |
| 634. | Correspondance symétrique | 252 |
| 638. | Correspondance symétrique mal indiquée | 254 |
| 641. | Correspondances entre $p$ objets d'une sorte et $q$ de l'autre | 255 |
| 647. | Objets en même nombre : usage des lettres | 257 |
| 651. | Usage des nombres pairs et impairs | 260 |
| 652. | Usage des accents et indices | 260 |
| 654. | Objets en même nombre : mauvaises notations | 262 |
| 656. | Autres mauvaises notations | 263 |

## CHAPITRE XI.

OBJETS DE PLUS DE DEUX SORTES.

Nos Pages.
658. Généralités ..... 265
659. Exemples tirés de l'Arithmétique ..... 265
660. Exemples tirés de l'Algèbre ..... 266
664. Exemples tirés de l'Analyse ..... 268
667. Exemples tirés de la Mécanique ..... 269
673. Exemples tirés de la Géométrie élémentaire ..... 272
680. Points sur les courbes ..... 275
985. Équations de la Géométrie analytique ..... 278

## CHAPITRE XII.

CAS DIFFICILES.

691. Tableaux simples ..... 281
694. Tableaux divers ..... 282
697. Signes multiples ..... 284
699. Combinaisons, arrangements ..... 285
703. Notations systématiques ..... 287
708. Rose des vents ..... 289
711. Les vingt-sept droites ..... 291
714. Les polyèdres réguliers ..... 293

---

# TROISIÈME PARTIE.

USAGE.

720. Idée et plan de la troisième Partie ..... 297

## CHAPITRE I.

ÉCRITURE DES EXPRESSIONS.

721. Signes simples ..... 298
724. Éléments modificateurs ..... 299
727. Éléments significatifs ou non ..... 300
730. Alignement ..... 301
732. Éléments bien calibrés ..... 302
735. Signes à formes multiples ..... 303
738. Séparations entre les éléments ..... 305

## CHAPITRE II.

### EXPRESSIONS MAL ÉCRITES.

N°s Pages.
742. Vides trop grands ..... 307
745. Signes trop rapprochés ..... 308
749. Ordre des éléments ..... 310
753. Éléments omis ..... 311
756. Signes de groupement ..... 313
759. Emploi singulier des signes de groupement ..... 314
761. Expressions ambiguës ..... 315
765. Nouvelles expressions ambiguës ..... 317
770. Pléonasmes ..... 319
774. Régularité des notations ..... 320

## CHAPITRE III.

### STRUCTURE DES EXPRESSIONS.

779. Monomes entiers ..... 323
782. Monomes fractionnaires ..... 324
785. Polynomes ordonnés ..... 325
789. Coefficients des polynomes ordonnés ..... 326
791. Correspondances entre les éléments ..... 328
795. Cas de plusieurs variables ..... 330
800. Combinaisons de $n$ objets $n-1$ à $n-1$ ..... 332
804. Combinaisons, arrangements, permutations ..... 334

## CHAPITRE IV.

### EXPRESSIONS ABRÉGÉES OU CONDENSÉES.

810. Expressions abrégées ..... 337
814. Expressions condensées ..... 338
819. Éléments en nombre illimité ..... 340
824. Élément excepté ..... 342
829. Limites de certaines expressions ..... 344
832. Cas de plusieurs indices ..... 346
834. $\Sigma$ et $\Pi$ superposés ..... 347

## CHAPITRE V.

### NOTATIONS PARTICULIÈRES.

839. Représentation des déterminants ..... 350
845. Factorielles ..... 353
848. Fractions continues ..... 354
852. Formes algébriques ..... 356
856. Substitutions ..... 357
861. Différences ..... 359
864. Notations symboliques ..... 360
868. Opérateurs ..... 362

## CHAPITRE VI.

### RELATIONS.

Nos Pages.
872. Généralités sur les relations ..... 365
876. Réduction du second membre à zéro ..... 366
879. Écriture du premier membre ..... 368
882. Passage au second membre ..... 369
886. Sur les dénominateurs ..... 370
890. Correspondances à bien indiquer ..... 372
893. Équations canoniques ..... 374
896. Abréviations dans les équations ..... 375
901. Ordre des deux membres ..... 378

## CHAPITRE VII.

### RELATIONS CONTINUES.

907. Égalités continues ..... 381
912. Relations continues ..... 383
915. Quantités proportionnelles ..... 385
919. Proportions ..... 386
926. Anciennes locutions ..... 389
930. Proportions proprement dites ..... 390
933. Fautes singulières ..... 391
937. Proportions continues ..... 393
940. Vestiges des anciennes notations ..... 394

## CHAPITRE VIII.

### SYSTÈMES D'ÉQUATIONS.

943. Couples d'équations analogues ..... 396
947. Couples d'équations de définition ..... 397
953. Trois équations analogues ..... 398
957. Systèmes réversibles ..... 401
959. Combinaisons deux à deux des 3 inconnues ..... 402
963. Système de trois équations de définition ..... 404
969. Systèmes de quatre équations analogues ..... 405
974. Systèmes de $n$ équations ..... 407
978. Systèmes d'équations quelconques ..... 409
979. Abréviations dans les systèmes ..... 410

## CHAPITRE IX.

### NOTATIONS INITIALES DES PROBLÈMES.

984. Classification objective, subjective ..... 413
988. Notations des inconnues ..... 414
991. Diminution du nombre des inconnues ..... 415
995. Choix de l'inconnue ..... 416
1000. Coordonnées polaires et bipolaires ..... 419
1004. Coordonnées cartésiennes dans le plan ..... 420
1008. Noyau polygonal ..... 422
1011. Coordonnées dans l'espace ..... 424

## CHAPITRE X.

### MISE EN ÉQUATIONS.

N°. Pages.
1016. Quantités intermédiaires ..... 427
1021. Coefficients indéterminés ..... 429
1026. Paramètres ..... 431
1029. Représentation des courbes planes ..... 433
1034. Courbes gauches et surfaces ..... 435
1037. Constantes arbitraires ..... 436
1041. Fonctions arbitraires ..... 438
1046. Homogénéité véritable ..... 439
1050. Homogénéité apparente ..... 441
1055. Symétrie des équations ..... 443
1059. Accord des équations ..... 446

## CHAPITRE XI.

### DIRECTION DES CALCULS.

1064. Calculs mécaniques ..... 450
1068. Addition des équations ..... 451
1073. Notations abréviatives ..... 454
1079. Changements de variables, substitutions ..... 456
1085. Systèmes symétriques d'équations disparates ..... 458
1090. Systèmes symétriques d'équations analogues ..... 460
1095. Systèmes linéaires ..... 462
1099. Inconnues de plusieurs sortes ..... 464
1102. Cas des équations continues ..... 465
1107. Élimination ..... 467
1112. De la symétrie en général ..... 468

## CHAPITRE XII.

### VÉRIFICATIONS.

1117. Nature du résultat ..... 471
1118. Lieux de points ..... 472
1122. Des équations ..... 473
1126. Résultats incomplets; surabondants ..... 474
1133. Valeurs numériques ..... 476
1136. Formules ..... 477
1141. Lettres qui doivent disparaître ..... 478
1144. Homogénéité géométrique ..... 479
1149. Homogénéité algébrique ..... 481
1154. Homogénéité d'infinitude ..... 483
1158. Variables indépendantes et fonctions ..... 484
1162. Symétrie et dissymétrie ..... 487
1166. Résumé ..... 488

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

(2661) PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
Quai des Grands-Augustins, 55.

# LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

**ANDRÉ** (**Désiré**). Ancien Élève de l'École Normale supérieure. — **Liste et Résumé de mes principaux travaux mathématiques**. Grand in-8 (25-16) de 106 pages; 1904 ..... 4 fr.

**FERMAT**. — **Œuvres de Fermat**, publiées par les soins de MM. *Paul Tannery* et *Charles Henry*, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. In-4 (28-23).

TOME I : *Œuvres mathématiques diverses. — Observations sur Diophante*. Avec 3 planches en héliogravure (Portrait de Fermat, fac-similé du titre de l'édition de 1679, et fac-similé d'une page de son écriture); 1891 ..... 22 fr.

TOME II : *Correspondance de Fermat*; 1894 ..... 22 fr.

TOME III : *Traduction* par M. PAUL TANNERY *des écrits latins de Fermat, de l'*Inventum novum *de Jacques de Billy, du* Commercium epistolicum *de Wallis*; 1896 ..... 28 fr.

**FOURIER**. — **Œuvres de Fourier**, publiées par les soins de *Gaston Darboux*, Membre de l'Institut, sous les auspices du MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE. 2 volumes in-4 (28-23) se vendant séparément :

TOME I. — *Théorie analytique de la Chaleur*. Volume de XXVII-564 pages; 1888 ..... 25 fr.

TOME II. — *Mémoires divers*. Volume de XVI-636 pages, avec un portrait de Fourier, reproduit en héliogravure; 1890 ..... 25 fr.

**HERMITE**. — **Œuvres de Charles Hermite**, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par EMILE PICARD, Membre de l'Institut. 3 volumes in-8 (25-16) se vendant séparément:

TOME I : Volume de XL-500 pages avec un portrait d'Hermite; 1905 ..... 18 fr.

TOME II. Volume de VI-520 pages, avec un portrait d'Hermite; 1908 ..... 18 fr.

TOME III. (*Sous presse.*)

**HERMITE et STIELTJES. — Correspondance d'Hermite et de Stieltjes**, publiée par les soins de B. BAILLAUD, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, et H. BOURGET, Maître de Conférences à l'Université, Astronome adjoint à l'Observatoire de Toulouse, avec une *Préface* d'EMILE PICARD, Membre de l'Institut. 2 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément :

TOME I (8 novembre 1882-22 juillet 1889). Volume de XX-477 pages avec deux portraits; 1905 ..... 16 fr.

Tome II (18 octobre 1889-15 décembre 1894). Volume de VI-457 pages avec un portrait et un fac-similé; 1905 ..... 16 fr.

**RIEMANN**. — **Œuvres mathématiques de Riemann**, traduites par L. LAUGEL, avec une préface de CH. HERMITE et un discours de FÉLIX KLEIN. Un beau volume in-8 (25-16), avec figures; 1898 ..... 14 fr.

**STOFFAES** (l'abbé), Professeur à la Faculté catholique des Sciences de Lille. — **Cours de Mathématiques supérieures**, à l'usage des candidats à la Licence ès Sciences physiques. 2e édition. In-8, avec figures; 1904 ..... 10 fr.



42661 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

QA
41
A63

André, Désiré
Des notations mathématiques

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY